

Séquence 2 : Dérivation de fonctions

1. Nombre dérivé

1.1 Rappel

f est une fonction et x_0 un réel de son ensemble de définition. Le taux de variation de f entre x et x_0 est :

$$t_f = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

1.2 Définition

f est une fonction et x_0 un réel de son ensemble de définition. Dire que f est **dérivable** en x_0 signifie que le taux de variation entre x et x_0 admet une limite finie en x_0 .

Cette limite, notée $f'(x_0)$, est appelée **nombre dérivé** de f en x_0 .

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Exemple :

Soit $f(x) = x^2$. Montrer que f est dérivable en a réel et calculer $f'(a)$.

Solution :

Utilisons la définition. Pour cela, formons le taux de variation entre x et a pour calculer sa limite quand x tend vers a .

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x - a)(x + a)}{x - a} = x + a$$

On a $\lim_{x \rightarrow a} x + a = 2a$. Ainsi, f est dérivable en tout point d'abscisse $x = a$ et $f'(a) = 2a$.

1.3 Interprétation géométrique

Si (C) est la courbe de f , dérivable en x_0 , alors la **tangente à (C) au point $A(x_0 ; f(x_0))$** est la droite qui passe par A et dont le coefficient directeur est $f'(x_0)$.

Pour l'illustration, voir les activités géogebra et flash.

L'équation de la tangente en A d'abscisse x_0 est :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

2. Fonction dérivée

2.1 Définition

f est une fonction définie sur D_f . D désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles inclus dans D_f .

On dit que f est **dérivable** sur D si elle est dérivable en tout point de D .

La fonction qui, à tout x de D associe le nombre dérivé $f'(x)$, est appelée la **fonction dérivée** de f .

On la note f' .

Exemple :

Nous venons de voir que si $f(x) = x^2$, pour tout réel a , $f'(a) = 2a$. La fonction dérivée de f est : $f'(x) = 2x$.

2.2 Tableau des dérivées des fonctions de référence

On peut démontrer avec la définition les formules suivantes :

$f(x)$	f est définie sur	f est dérivable sur	$f'(x)$
$k, (k \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	0
$ax+b$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	a
$x^n (n \in \mathbb{N})$	\mathbb{R}	\mathbb{R}	$n x^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$] 0 ; +\infty [$	$] 0 ; +\infty [$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

L'ensemble des nombres réels où une fonction est dérivable est l'**ensemble de dérivabilité** de cette fonction.

Exemple :

$f(x) = x^5$, $f'(x) = 5x^{5-1}$ donc $f'(x) = 5x^4$. f est dérivable sur \mathbb{R} .

2.3 Opérations sur les dérivées

u et v sont des fonctions dérivables sur D . Alors on a les formules suivantes :

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(k u)' = k u'$
- $(u \cdot v)' = u'v + v'u$
- $(u^n)' = n u' u^{n-1}$.
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(\frac{u'v - u v'}{v^2}\right)$

2.4 Exemples

Calculer la dérivée f' de si :

$$1) f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$2) f(x) = -x^3$$

$$3) f(x) = (x^2 + 3)\sqrt{x}$$

$$4) f(x) = (3x + 2)^4$$

$$5) f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

Solutions :

$$1) f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$$

$$2) f'(x) = -3x^2$$

$$3) \text{ Posons } u(x) = x^2 + 3 \text{ et } v(x) = \sqrt{x}. \text{ Alors } u'(x) = 2x \text{ et } v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$f'(x) = u'v - u v' = 2x\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 3) = \frac{5x^2 + 3}{2\sqrt{x}}$$

$$4) f(x) = (3x + 2)^4. \text{ Posons } u(x) = 3x + 2, \text{ alors } u'(x) = 3.$$

$$f'(x) = 3 \times 4 \times (3x + 2)^{4-1} = 12(3x + 2)^3$$

$$4) f(x) = \frac{x+2}{x-1}. \text{ Posons } u(x) = x+2 \text{ et } v(x) = x-1. \text{ Alors } u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = 1.$$

$$f'(x) = \left(\frac{u'v - u v'}{v^2}\right) = \frac{-3}{(x-1)^2}.$$