Corrigé exercice série C 2022

Exercice

Partie A :**Probabilité**

On a 5 cases et une boule.

Épreuve : faire tomber la boule dans l'une des 5 cases

1. a- Détermination de p

$p_k = (k+1)p$

Or $\sum_{1}^{5} p_k = 1$ donc $p = \frac{1}{20}$

b- Déduisons-en que $p_1 = \frac{1}{10}$ et $p_3 = \frac{1}{5}$

$p_1 = (1+1)\frac{1}{20} = \frac{1}{10}$ $p_3 = (3+1)\frac{1}{20} = \frac{1}{5}$

2. On répète trois fois de suite et d'un manière indépendante l'épreuve de la question1).

a- La probabilité pour que la boule tombe une fois et une seule dans la case n°1.

$p(x = k) = C_3^k {p_1}^k (1 - p_1)^{3-k}$

Donc $p(x = 1) = C_3^1 p_1 (1 - p_1)^2 = 3.\frac{1}{10}\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{243}{1000}$

b- - La probabilité pour que la boule tombe au moins deux fois dans la case n°3.

$p(x >= 2) = C_3^2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{10}\right)^2 + C_3^3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{10}\right)^0 = \frac{13}{125}$

Partie B : **Arithmétique**

Soit $A_n = 5^{4n+2} - 11^{2n+2}$, pout tout entier naturel n.

1. Montrons que quel que soit $n \in IN$, $A_n = 5^{4n+2} - 11^{2n+2}$ est divisible par 4.

   a- Par récurrence

   Notons P(n) la propriété « A_n est divisible par 4 ».

   P(n) : « Il existe un entier relatif k tel que A_n = 4k »

   $A_0 = 5^{4.0+2} - 11^{2.0+2} = 5^2 - 11^2 = -96 = 4(-24)$

   Donc P(0) est vraie.

   Supposons que P(n) soit vraie, c'est-à-dire, il existe un entier relatif k tel que A_n= 4.k.

   Montrons que P(n+1) est aussi vraie.

   Cherchons donc un entier relatif k', tel que A_{n+1}= 4. k', s'il en existe.

$A_{n+1} = 5^{4n+2+4} - 11^{2n+2+2}$

$A_{n+1} = 5^{4n+2}.5^4 - 11^{2n+2}.11^2$

$A_{n+1} = 5^{4n+2}.625 - 11^{2n+2}.121 = 5^{4n+2}.5^4 - 11^{2n+2}.121 = 5^{4n+2}.(1+624) - 11^{2n+2}.(1+120)$

$A_{n+1} = 5^{4n+2}.(1+4.156) - 11^{2n+2}.(1+4.30)$

$A_{n+1} = 5^{4n+2}.1 - 11^{2n+2}.1 + 4(156.5^{4n+2} - 30.11^{2n+2})$

Ainsi $A_{n+1} = A_n + 4k_1$, avec $k_1 = 156.5^{4n+2} - 30.11^{2n+2}$
Par hypothèse de récurrence, A_n= 4.k, donc $A_{n+1} = 4.k + 4k_1$

Ainsi $A_{n+1} = 4.k'$, avec k' = k + k_1

Conclusion $A_n = 5^{4n+2} - 11^{2n+2}$ est divisible par 4 quel que soit n.

b- Congruence

$5 \equiv 1 \ 4$ donc $5^{4n+2} \equiv 1 \ 4$

$11 \equiv 3 \ 4$ donc $11^2 \equiv 1 \ 4$ et $11^{2n+2} \equiv 1 \ 4$

Alors $5^{4n+2} - 11^{2n+2} \equiv 0 \ 4$.

D'où le résultat.

2- a- Montrons que si un entier relatif N est divisibles simultanément par deux entiers relatifs premiers entre eux, alors N est divisible par le produit pq.

Soit N, p et q trois entiers tels que pgcd(p,q)= 1

Si p | N, alors il existe un entier relatif k tel que N = p.k

Si q | N, alors il existe un entier relatif h tel que N = q.h

On a alors p.k = q.h. Donc p | h.q

Or pgcd(p,q)=1, d'après le théorème de Gauss, p | h, ce qui signifie qu'il existe une entier relatif h' tel que h = p.h'.

D'où N = h'.p.q, et donc p.q | N.

c- Montrons que 12 divise A_n.

d- Comme 3 divise A_n et 4 divise A_n, et 3 et 4 sont premiers entre eux, alors, d'après le résultat précédent, 3. 4= 12 divise aussi A_n