

Calcul matriciel

1. Définitions

1.1 Matrice (n,p)

Une matrice est un tableau de nombres comportant n lignes et p colonnes. On dit que la matrice est de taille n x p ou (n,p).

Si n = p, on dit que la matrice est carrée d'ordre n.

Exemples :

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice (3,2)
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{7} & -2 & 0 \end{pmatrix}$ est une matrice (2,3)

Une matrice carrée est donc une matrice ayant le même nombre de lignes et de colonnes.

Pour simplifier, nous dirons qu'une matrice carrée ayant n lignes et n colonnes est une matrice de taille n

Exemples : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{7} & -2 & 0 \\ 1 & 8 & -14 \end{pmatrix}$ sont des matrices carrées.

Dans ce chapitre, on n'étudiera que les matrices carrées.

1.2 Matrices carrées particulières

1.2.2 Matrices nulles

Une matrice nulle est une matrice dont tous les éléments la constituant sont nuls.

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices nulles

1.2.2 Matrices diagonales

Une matrice diagonale est une matrice dont les éléments autres que les éléments diagonaux sont tous nuls.

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$ sont des matrices diagonales

1.2.3 Matrices triangulaires

Une matrice triangulaire supérieure est une matrice dont les éléments situés en-dessous de la diagonale sont tous nuls que les éléments diagonaux sont tous nuls.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{7} & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ sont des matrices triangulaires supérieures.}$$

Une matrice triangulaire inférieures est une matrice dont les éléments situés en-dessous de la diagonale sont tous nuls que les éléments diagonaux sont tous nuls.

Exemples

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -13 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -8 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ sont des matrices triangulaires inférieures}$$

1.2.3 Matrice identité

On appelle matrice identité de taille n et on note I_n la matrice diagonale, dont tous les éléments diagonaux sont tous égaux à 1.

Exemples

$$A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sont des matrices identités}$$

2. Opérations sur les matrices

2.1 Addition de deux matrices

On ne peut addition deux matrices que si elles sont de même taille.

L'addition s'effectue élément par élément.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

La somme de deux matrices est une matrice de même taille.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}$$

Propriété

L'addition de deux matrices est commutative, ce qui signifie que si A et B sont deux matrices de même taille, alors $A+B = B+A$.

De même, l'addition des matrices est associative : si A, B et C sont des matrices de même taille, alors $(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$.

2.2 Multiplication d'une matrice par un nombre

Le produit d'une matrice par un nombre k est une matrice de même taille.

Elle s'obtient en multipliant chaque élément par k .

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}$$

Propriété

Pour toute matrice M et pour tous réels k et k' , $(k \cdot k') \cdot M = k \cdot (k' \cdot M)$

2.3 Produit de deux matrices

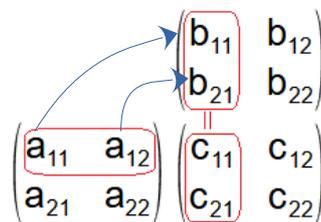
Le produit de deux matrices A et B est une matrice C de même taille que A et B .

L'élément c_{ij} de la matrice C est le « produit scalaire » de la ligne i de A et de la colonne j de B .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, \quad c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \quad \text{et} \quad c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

Disposition pratique



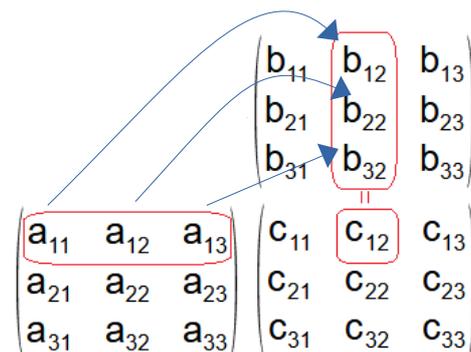
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \quad \dots \quad c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}$$

L'élément c_{ij} est le « produit scalaire » de la ligne i de A et de la colonne j de B

Disposition pratique



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

Le produit de deux matrices n'est pas commutative : Si A et B sont deux matrices de même taille, A.B et B.A ne sont pas nécessairement égales.

La multiplication de deux matrices associative : $Ax(BxC) = (AxB)xC$

La multiplication de deux matrices distributive par rapport à l'addition $Ax(B+C) = (AxB)+(AxC)$

Si M est une matrice carrée de taille n, alors $M \cdot I_n = I_n \cdot M = M$: on dit la matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication de matrice.

Une matrice M est dite idempotente si son carré est égale à elle-même : $M^2 = M.M = M$. Dans ce cas, $M^n = M$ quel que soit l'entier naturel n.

Une matrice M est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $M^p = 0$ (M^p est la matrice nulle)

2.4 Puissance d'une matrice carrée

Pour une matrice carrée M, on définit le carré de M par $M^2 = M.M$.

De la même manière on définit le cube de la matrice et plus généralement la puissance n^{ème} de M par

$$M^3 = M.M.M \quad \text{et} \quad M^n = M.M \dots M$$

2.5 Transposée d'une matrice

La transposée d'une matrice M, notée tM est la matrice de même taille que M et dont les éléments de la i^{ème} colonne sont les éléments de la i^{ème} ligne de M, et les éléments de la j^{ème} ligne sont les éléments de la j^{ème} colonne de M.

Exemple

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 0 & 7 & \sqrt{3} \\ 5 & \frac{1}{3} & -4 \end{pmatrix}$. Sa transposée est ${}^tM = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 9 & 7 & \frac{1}{3} \\ -1 & \sqrt{3} & -4 \end{pmatrix}$

Propriété

La transposée d'une matrice diagonale est égale à elle-même.

3. Déterminant d'une matrice

Considérons une matrice carrée 2 x 2 :

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le déterminant de M, noté det M est le nombre défini par $\det M = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Exemples

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 1.3 - (-1)2 = 3 + 2 = 5$$

Pour une matrice 3x3

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Exemple

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2(3 \cdot 4 - 1 \cdot 5) + 2((-1) \cdot 4 - 1 \cdot 1) + 0 = 14 - 10 = 4$$

4. Trace d'une matrice

La trace d'une matrice est la somme des éléments diagonaux. On note $\text{Tr}(A)$

Exemple

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} . \text{Tr}(A) = 2+3+4 = 9$$

5. Inverse d'une matrice

Une matrice carrée M d'ordre n est dite inversible s'il existe une matrice carrée N de même taille telle que $M \cdot N = N \cdot M = I_n$.

N est appelée matrice inverse de M .

Si une matrice n'est pas inversible, on dit qu'elle est singulière.

Exemple

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\text{On a } M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

M est donc inversible et son inverse est N .

Propriétés

Si M est inversible, son inverse est unique, et se note M^{-1} .

M^{-1} est aussi inversible et son inverse est M .

Si deux matrices de même taille A et B sont inversibles, alors le produit $A \cdot B$ est aussi inversible et l'inverse de $A \cdot B$ est la matrice $B^{-1} \cdot A^{-1}$.