Loi binomiale - Exercices

Exercice 1 corrigé disponible

Dans une région pétrolifère, la probabilité qu'un forage conduise à une nappe de pétrole est 0,1.

1) Justifier que la réalisation d'un forage peut être assimilée à une épreuve de Bernoulli.
2) On effectue 9 forages.
   a. Quelle hypothèse doit-on formuler pour que la variable aléatoire X correspondant au nombre de forages qui ont conduit à une nappe de pétrole suive une loi binomiale ?
   b. Sous cette hypothèse, calculer la probabilité qu'au moins un forage conduise à une nappe de pétrole. En donner la valeur à 10^{-3} près.

Exercice 2 corrigé disponible

Un constructeur de composants produit des résistances. La probabilité qu'une résistance soit défectueuse est égale à 5×10^{-3}.

Dans un lot de 1000 résistances, quelle est la probabilité d'avoir

a. Exactement deux résistances défectueuses ?
b. Au plus deux résistances défectueuses ?
c. Au moins deux résistances défectueuses ?

Exercice 3 corrigé disponible

Une classe compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur interroge au hasard un élève de la classe, sans se rappeler quels élèves il a déjà interrogés.

On considère un entier positif ou nul n et on note X la variable aléatoire qui correspond au nombre de filles interrogées au cours de n jours consécutifs.

1) Quelle est la loi de X ?
2) Quelle est la probabilité que sur 10 jours consécutifs, soient interrogées 4 filles exactement ? au moins 4 filles ?
3) Quel doit être le nombre minimal de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieure à 0,001 ?

Exercice 4 corrigé disponible

Indiquer en justifiant si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1) Si X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}\left(n;\frac{1}{3}\right)$ avec $n \geq 2$, alors $p(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$
2) Si X suit la loi $\mathcal{B}(5;p)$ et si $p(X=1) = \frac{5}{3}p(X=0)$ alors $p(X=2) = 3p(X=3)$
3) Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale avec $E(X) = 36$ et $\sigma(X) = 3$ alors $p(X = 29) \approx 0{,}01$ à 10^{-3} près.

Exercice 5

Un QCM (questionnaire à choix mutiples) est composé de cinq questions numérotées de 1 à 5. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte.

Partie A :

Un candidat répond à ce QCM, en cochant, au hasard et de façon indépendante, chacune des 5 questions. On décide de donner au candidat un point par réponse exacte.
Soit X la variable aléatoire associant aux réponses du candidat la note obtenue sur 5.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.
2. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne la note maximale ?
3. Etablir la loi de probabilité de X en complétant le tableau ci-dessous en donnant les valeurs exactes, puis arrondies au millième :

valeurs x_i	0					

4. Quelle est la probabilité qu'un candidat obtienne plus de la moyenne ?
5. Quelle note le candidat peut-il espérer obtenir (c'est-à-dire quelle note moyenne obtiendrait-il s'il remplissait au hasard un très grand nombre de QCM) ?

Partie B :

On suppose que n candidats (n entier non nul) répondent à ce QCM, et que tous le font au hasard, indépendamment des autres.

1. Exprimer en fonction de n.la probabilité p_n qu'au moins un candidat obtienne la note 5.
2. Pour quelles valeurs de n cet événement se produira-t-il avec une probabilité supérieure à 0,99 ?

Exercice 6

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes. Cette compagnie effectue une étude basée sur 2 trajets par jour pendant les 20 jours ouvrables d'un mois, soit au total 40 trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Un trajet coûte 10€ ; en cas de fraude, l'amende est de 100€. Théo fraude systématiquement lors des 40 trajets étudiés. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de trajets où Théo a été contrôlé.

1) On suppose que $p = 0{,}05$.
   a. Calculer à 10^{-4} près la probabilité que Théo soit contrôlé au plus 2 fois.
   b. Soit Z la variable aléatoire donnant le gain algébrique réalisé par Théo. Justifier que $Z = 400 - 110X$ puis calculer $E(Z)$.
2) On ne connaît plus la valeur de p.

Pour quelles valeurs de p, la fraude systématique est-elle favorable à Théo ? Justifier.

Exercice 7

Une urne contient trois boules jaunes et deux boules blanches.

On tire successivement et avec remise huit boules de l'urne et on appelle X la variable aléatoire qui compte le nombres de boules blanches obtenues.

Les probabilités seront données à 10^{-4} près.

1. Justifier que la variable aléatoire suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

2. Déterminer la probabilité d'obtenir :

- **a.** Trois boules blanches.
- **b.** Au plus quatre boules blanches.
- **c.** Au moins trois boules blanches.

3. Déterminer $P(3 \leqslant X \leqslant 6)$.

4. Calculer l'espérance de X et en donner une interprétation.

Exercice 8

Une classe de première S du lycée Jean Mermoz compte 24 élèves dont 10 filles. Leur professeure de mathématiques interroge un élève au début de chaque cours pour corriger le travail fait à la maison mais comme elle est très distraite, elle ne se rappelle jamais quels élèves elle a déjà interrogés. Soit n un entier positif ou nul. Soit X le nombre de filles interrogées lors de n cours consécutifs.

1) Quelle est la loi de probabilités de X ?

2) Quelle est la probabilité qu'exactement 4 filles soient interrogées lors de 10 cours consécutifs ? *On pourra noter cet événement E.*

3) Quelle est la probabilité qu'au moins 3 filles soient interrogées lors de 10 cours consécutifs ? *On pourra noter cet événement F.*

4) Une période de combien de cours consécutifs faut-il considérer pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée durant cette période soit inférieure à 0,001?

5) Une année scolaire comporte environ 150 cours de mathématiques. A combien peut-on estimer le nombre de garçons qui seront interrogées au cours de l'année scolaire en mathématiques?

Exercice 9

Une compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention, parmi ses dossiers d'accidents de circulation.

85 % des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle. 20 % des dossiers entraînent des frais de dommag corporels. Parmi les dossiers entraînant des frais de réparation matérielle, 12 % entraînent des frais de dommag corporels.

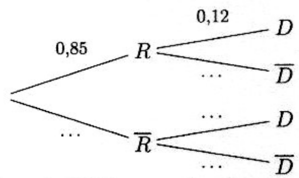
Soit les événements suivants : R : « le dossier traité entraîne des frais de réparation matérielle » ;
D : « le dossier traité entraîne des frais de dommages corporels ».

On choisit un dossier au hasard.
Dans tout l'exercice, les résultats seront donnés <u>sous forme décimale</u>, arrondis au millième près.

1. a. Recopier et compléter le tableau.

	R	$\overline{R}$	Total
D			
$\overline{D}$			
Total	85		100

b. Recopier et compléter l'arbre pondéré.

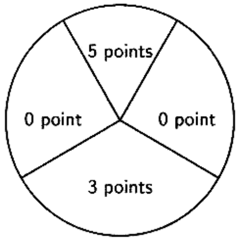


2. On choisit un dossier au hasard. Calculer la probabilité pour qu'un dossier :
   a. entraîne des frais de réparation matérielle et des frais de dommages corporels ;
   b. entraîne seulement des frais de réparation matérielle ;
   c. entraîne seulement des frais de dommages corporels ;
   d. n'entraîne ni frais de réparation matérielle ni frais de dommages corporels ;
   e. entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il entraîne des frais de dommages corporels.

3. On constate que 40% des dossiers traités correspondent à des excès de vitesse et parmi ces derniers 60% entraînent des frais de dommages corporels.
   On note E : « le dossier traité correspond à un excès de vitesse ».
   a. On choisit un dossier. Quelle est la probabilité p pour que ce dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels ?
   b. On choisit cinq dossiers de façon indépendante. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels ?
   c. Soit n un entier ($n \geqslant 1$). On choisit n dossiers de façon indépendante. Déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'au moins un dossier corresponde à un excès de vitesse et entraîne des frais de dommages corporels, soit supérieure ou égale à 0,9.

Exercice 10 corrigé disponible

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.
   On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.
   On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.
   On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.
   On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$.
   Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.
2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.
   On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».
   On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».
   On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».
   On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.
   a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p(G_2) = \frac{5}{36}$.
      On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$
   b. En déduire $p(P)$.
3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.
   Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?
4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.
   Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.
   On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.
   a. Donner la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Exercice 11

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

- La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de 0, 99 (sensibilité du test).
- La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de 0, 97 (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{\text{V}}$ et $\overline{\text{T}}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1) a) Préciser les valeurs des probabilités $P(\text{V})$, $P_{\text{V}}(\text{T})$, $P_{\overline{\text{V}}}(\overline{\text{T}})$.
   Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
   b) En déduire la probabilité de l'évènement $\text{V} \cap \text{T}$.
2) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.
3) a) Justifier par un calcul la phrase :
   « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».
   b) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. Que peut-on en conclure.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les

Exercice 12 **corrigé disponible**

1. **Restitution organisée de connaissances :**

   Prérequis : On rappelle que deux évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

   Soient A et B deux évènements associés à une expérience aléatoire.

   a. Démontrer que $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right)$.

   b. Démontrer que, si les évènements A et B sont indépendants pour la probabilité p, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont également.

2. **Application :** Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux évènements indépendants :

   - R : « il n'entend pas son réveil sonner » ;
   - S : « Son scooter, mal entretenu, tombe en panne ».

   Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale 0,1 et que celle de S est égale à 0,05. Lorsque qu'au moins l'un des deux évènements se produit, Stéphane est en retard au lycée sinon il est à l'heure.

   a. Calculer la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

   b. Calculer la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

   c. Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.
   Quelle est la probabilité que Stéphane entende le réveil au moins quatre fois au cours d'une semaine ? Arrondir le résultat à la quatrième décimale.

Exercice 13 **corrigé disponible**

$\boxed{1}$ On considère un dé ayant la forme d'un tétraèdre régulier non truqué dont les faces sont noté 1, 2, 3, 4.
On lance ce dé et on note le numéro de la face inférieure.

1°) Le but de cette question est de déterminer, à l'aide de la loi binomiale, un intervalle de fluctuation I, au seuil approximatif de 95 %, de la fréquence du numéro 1 dans un échantillon aléatoire de 100 lancers.

Recopier et compléter le modèle de rédaction suivant :

On note X le nombre de fois où l'on obtient le chiffre 1 dans un échantillon aléatoire de 100 lancers.

X suit la loi binomiale de paramètres $n = \ldots\ldots$ et $p = \ldots\ldots$

On cherche le plus petit entier naturel a tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}025$.
On cherche le plus petit entier naturel b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}975$.

Pour cela, on utilise la calculatrice afin d'obtenir un tableau de valeurs de la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Avec la calculatrice, on trouve $a = \ldots\ldots$ et $b = \ldots\ldots$.

2. Programmation en langage Python :
- écrire la fonction **coef(n,k)** qui calcule les coefficients binomiaux
- écrire la fonction **binomiale_c(n,p,x)** qui calcule P(X≤x) pour la loi binomiale B(n,p)
- écrire un programme qui calcul l'intervalle I tel que $I[a;b]$ avec $P(X \leq a) > 0{,}025$ et $P(X \leq b) \geq 0{,}975$

Exercice 14

Monsieur Z, chef du gouvernement d'un pays lointain, affirme que 52 % des électeurs lui font confiance. On interroge 100 électeurs au hasard (la population est suffisamment grande pour considérer qu'il s'agit de tirages avec remise) et on souhaite savoir à partir de quelles fréquences, au seuil de 95 %, on peut mettre en doute le pourcentage annoncé par Monsieur Z, dans un sens, ou dans l'autre.

1. On fait l'hypothèse que Monsieur Z dit vrai et que la proportion des électeurs qui lui font confiance dans la population est 0,52. Montrer que la variable aléatoire X, correspondant au nombre d'électeurs lui faisant confiance dans un échantillon de 100 électeurs, suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}52$.

2. On donne ci-contre un extrait de la table des probabilités cumulées $P(X \leq k)$ où X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}52$.

k	$P(X \leq k) \approx$
40	0,0106
41	0,0177
42	0,0286
43	0,0444
...	...
61	0,9719

a. Déterminer a et b tels que :

- a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0{,}025$;
- b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0{,}975$.

Exercice 15

Dans une entreprise, la proportion de pièces non commercialisables à la sortie d'une chaîne de production est 8 %.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre de pièces non commercialisables dans un échantillon aléatoire et supposé avec remise de 200 pièces issues de la production.

1°) Quelle loi suit X ? Répondre avec précision.
2°) Déterminer les entiers a et b ainsi définis :
- a est le plus petit entier naturel tel que $P(X \leqslant a) > 0{,}005$;
- b est le plus petit entier naturel tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0{,}995$.

3°) En déduire l'intervalle de fluctuation* I au seuil de 99 % de la fréquence de pièces non commercialisables dans les échantillons de taille 200 issus de cette production.

Exercice 16

Indiquer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse et justifier soigneusement la répon
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quat
Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.
Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0, 6

Affirmation : « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

Exercice 17

Dans un hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistiqu permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité q l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se s intéressés à ce modèle. On suppose que le nombre d'acheteurs parmi cet échantillon s une loi binomiale.

1) Déterminer le nombre moyen de personnes de cet échantillon qui ont acheté un or nateur.

2) Quelle est la probabilité, dans cet échantillon, qu'entre 3 et 6 personnes aient ach un ordinateur ? (on donnera le résultat à 10^{-3})

Exercice 18 **corrigé disponible**

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1^{er} niveau, 75 vont au 2^e niveau et les autres vont au 3^e niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2^e niveau, les autres vont au 1^{er} niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.
On pourra considérer les évènements suivants :

- N_1 : « La personne va au premier niveau. »
- N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »

1) Recopier et remplir le tableau d'effectifs suivants :

	N_1	N_2	N_3	Total
E				
$\overline{E}$				
Total				300

2) a) Déterminer la probabilité que la personne aille au 2^e niveau par l'escalier. (On donnera la réponse sous forme de fraction)

b) Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

c) Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2^e niveau.

3) On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2^e niveau.

a) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X. (On se justifiera)

b) Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2^e niveau. On donnera auparavant la formule exacte.

c) En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2^e niveau ? (On arrondiera à l'entier le plus proche)

4) Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins une personne va au 2^e niveau » soit supérieure ou égale à $0,99$.

Exercice 19

Un concours de recrutement consiste en 3 épreuves.

Des quotas de sélection sont imposés à chaque épreuve de la manière suivante :

- 1^{ère} épreuve : 60 % du nombre total de candidats sont sélectionnés
- 2^{ème} épreuve : 50 % du nombre total de candidats sont sélectionnés
- 3^{ème} épreuve : 25 % du nombre total de candidats sont sélectionnés

Pour être reçu à ce concours, il faut réussir au moins deux épreuves sur les trois. Les résultats chaque épreuve ne sont donnés qu'à l'issue des troisépreuves qui sont ainsi indépendantes entre ell

1. Peut-on utiliser la loi binomiale pour déterminer les probabilités de réussite et d'échec à concours ?
2. Décrire la situation à l'aide un arbre pondéré.
3. Déterminer la probabilité de réussite d'un candidat pris au hasard à ce concours.

Exercice 20

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.
On considère les évènements suivants :

J_1 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »

J_3 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »

J_4 « le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »

B « toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible sauf dans la question **4.b)** *où une valeur arrondie à 10^{-2} suffit.*

1. Calculer $P_{J_1}(B)$, probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement J_1 est réalisé.
   Calculer de même la probabilité $P_{J_2}(B)$.
   On admet dans la suite les résultats suivants :
   $$P_{J_3}(B) = \frac{1}{30} \quad \text{et} \quad P_{J_4}(B) = \frac{1}{210}$$
2. Montrer que $P(B)$, probabilité de l'évènement B, vaut $\frac{1}{7}$. On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.
3. On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?
4. On joue 10 fois de suite à ce jeu. Chacune des parties est indépendante des précédentes. On note N la variable aléatoire prenant comme valeur le nombre de partie où toutes les boules tirées sont blanches.
   a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N ?
   b) Quelle est l'espérance et la variance de N ?
   c) Calculer la probabilité de l'évènement $(N = 3)$.
5. On décide de faire un jeu d'argent. Un joueur doit payer 10 € pour rentrer dans la partie. La partie se déroule comme expliqué dans l'introduction.
   - Si le joueur termine avec 4 boules blanches, il gagne 1000 €.
   - S'il termine avec 3 boules blanches exactement (sans noire), il gagne 100 €.
   - S'il termine avec 2 boules blanches exactement (sans noire), il gagne 50 €.
   - S'il termine avec 1 boules blanches exactement (sans noire), il gagne 20 €.

   Ce jeu est-il favorable au joueur ? *(On pourra introduire la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur.)*

Exercice 21

Une entreprise fabrique un article qui doit répondre à des normes précises. On considère que 8 % des articles produits ne sont pas conformes aux normes. Un test de contrôle en fin de fabrication est censé repérer les articles non conformes. Cependant le test comporte une certaine marge d'erreur ; une étude a établi que :

- 5 % des articles conformes aux normes sont refusés par le test ;
- 10 % des articles non conformes aux normes sont acceptés par le test.

On considère un article pris au hasard au moment de passer le test. On note :
C l'événement « l'article est conforme aux normes » ;
T l'événement « l'article est accepté par le test ».
$\overline{\text{C}}$ et $\overline{\text{T}}$ désignent les événements contraires respectifs de C et T.
La partie 4 est indépendante des questions précédentes.

1. Compléter le tableau à double entrée ci-dessous (on donnera les résultats en pourcentages) :

	C	$\overline{C}$	Total
T			
$\overline{T}$			
Total			100

2. Que signifie l'événement $C \cap T$? Calculer sa probabilité.
3. Calculer la probabilité $p(T)$ que la pièce soit acceptée par le test.
4. On suppose pour la suite que la probabilité que l'article soit accepté par le test est de 0,882.
   On prélève successivement 20 articles dans la production et on suppose que le nombre d'articles est suffisamment grand pour que le tirage puisse être assimilé à un tirage avec remise. On donnera les résultats arrondis aux millièmes si nécessaire.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre d'articles acceptés par le test parmi les 20 articles prélevés au hasard.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Préciser ses paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité que 18 des 20 articles soient acceptés par le test.
   On écrira le calcul effectué.

Exercice 22

Un photographe animalier se poste là où un chat sauvage passe parfois à l'aube, de façon totalement aléatoire. L'un de ses collègues lui a affirmé qu'au cours des deux mois précédents le félin était passé six fois et il en a conclu que la probabilité d'apparition du chat un matin donné s'établissait à 0,1.

Notre photographe ne peut consacrer que cinq jours à cet affût mais il partira avant s'il a pu photographier le chat. Selon les services de la météo, il pleuvra le deuxième jour. Sinon, il fera beau temps.

1. Quelle est la probabilité de photographier le chat sous la pluie ?
2. Quelle est la probabilité de photographier le chat au cours de ces cinq jours ?

Exercice 23

(Nombre de désintégrations d'une substance radioactive). Le nombre X de désintégrations d'une substance radioactive durant un intervalle de temps de 7,5 secondes suit une loi de Poison de paramètre 3,87.

(*a*) Quel est le nombre moyen de désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ? Calculer l'écart-type correspondant.

(*b*) Déterminer la probabilité qu'il n'y ait aucune désintégration durant un intervalle de temps de 7,5 secondes.

(*c*) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 3 et 5 désintégrations durant un intervalle de temps de 7,5 secondes ?

Exercice 24

Dans cet exercice chaque probabilité demandée sera arrondie à 10^{-3}.

Une petite entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est 0,05. On admet que les absences des employés survenues un jour donné sont indépendantes les unes des autres.

On note X la variable aléatoire qui à chaque jour tiré au hasard associe le nombre d'employés absents.

1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :
   (a) E_1 : "Un jour donné, il y a exactement trois absents" ;
   (b) E_2 : "Un jour donné, il y a strictement plus de deux absents" ;
   (c) E_3 : "Un jour donné, le nombres d'absents est compris entre trois et six (bornes comprises)"
3. Calculer l'espérance mathématique notée $E(X)$ de la variable aléatoire X.
   Que représente $E(X)$?
4. On approche la loi binomiale de la question 1) par une loi de Poisson de paramètre λ.
   Déterminer la valeur de λ.
   En utilisant la loi de Poisson, déterminer les probabilités respectives des trois événements E_1, E_2 et E_3 de la question 2.
   Vérifier que les résultats obtenus ici sont proches de ceux obtenus à la question 2).