MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SECRÉTARIAT GÉNÉRAL

DIRECTION GÉNÉRALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR

Service du Baccalauréat

MESUPRES

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT GÉNÉRAL

SESSION 2022

Série	: Scientifique	Épreuve de	: MATHÉMATIQUES
Option	: S	Durée	: 04 heures
Code matière	: 009	Coefficient	: 6

NB : - L'utilisation d'une machine calculatrice scientifique non programmable est autorisée

- Les deux exercices et les deux problèmes sont obligatoires

Exercice 01 (03 points)

I-ARITHMETIQUE :

1- Montrer que pour tout entier naturel n : $9^{3n+1} + 4^{6n+1}$ est divisible par 13 (0,5pt)

2- Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 + \bar{3}x = \bar{4}$ (0,5pt)

3- Soit (E) l'équation dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ définie par $37x - 43y = 1$

En utilisant l'algorithme d'Euclide relatif aux deux nombres 37 et 43, trouver une solution particulière de (E) puis résoudre l'équation (E). (0,5pt)

II- CALCUL MATRICIEL :

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

1- Calculer A^2 et A^3 (0,25 pt × 2)

2- Vérifier que $4A + A^2 - A^3 = 4I_3$ où I_3 est la matrice identité d'ordre 3 (0,5 pt)

3- En déduire que A est inversible et donner son inverse A^{-1} (0,25 pt × 2)

Exercice 02 (02 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(2;3;1)$; $B(-1;1;1)$; $C(-3;1;0)$ et $D(4;-1;3)$.

1- Calculer $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. (0,5 pt)

2- Ecrire une équation cartésienne du plan (ABC) (0,5 pt)

3- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) de vecteur directeur $\vec{u}(1\,;2\,;-1)$ et passant par le point D (0,5 pt)

4- Montrer que le plan (ABC) et la droite (Δ) sont parallèles. (0,5 pt)

PROBLEME 1 (07 points)

Dans le plan orienté $(\mathscr{P})$, on considère un carré direct ABCD tel que AB = 4cm

Soit (d) la médiatrice du segment [AB].

On note par :

t la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$.

t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

$s_{(AD)}$ la symétrie orthogonale d'axe (AD)

$f = t \circ s_{(AD)}$

S la similitude plane directe qui laisse invariant le point A et transforme C en B.

PARTIE A :

1- a) Prouver que le point C est le barycentre du système $\{(A;-1);(B;1);(D;1)\}$. (0,5 pt)

b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan $(\mathscr{P})$ vérifiant

$\|-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\| = \|-\overrightarrow{2MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\|$ (0,75 pt)

2- Justifier que $t = t_1 \circ t_2$ (0,5 pt)

3- Décomposer t_1 en deux symétries orthogonales dont l'un des axes est la droite (AD). (1pt)

4- En utilisant les résultats des questions précédentes, préciser la nature et les éléments caractéristiques de f (1pt)

5- Déterminer le rapport et l'angle de S (0,5)

PARTIE B :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$

1-a) Ecrire les expressions complexes de t et $s_{(AD)}$ (0,5 pt)

b) En déduire l'expression complexe de f (0,5 pt)

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f à l'aide de son expression complexe. (0,75 pt)

2- a) En utilisant les hypothèses S(A) = A et S(C) = B, déterminer l'expression complexe de S. (0,5 pt)

b) Retrouver le rapport et l'angle de S à l'aide de son expression complexe. (0,5 pt)

PROBLEME 2 (08 points)

Les deux parties A et B sont indépendantes

PARTIE A :

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(x) = x - 2 + e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On note par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

1- Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$ de la fonction f (0,5 pt)

2- a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \,]0\,;+\infty[$ où f' est la fonction dérivée de f (0,5 pt)

b) Dresser le tableau de variation de f (1 pt)

3- Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$. (0,5 pt)

4- Construire la courbe $(\mathscr{C})$ en précisant la demi-tangente au point d'abscisse $x_0 = 0$ (1,25 pt)

PARTIE B :

On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2}\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1- Soit $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{1-4x^2}\,dx$

En remarquant que $\dfrac{1}{1-4x^2} = \dfrac{1}{2(1+2x)} + \dfrac{1}{2(1-2x)}$

Calculer l'intégrale I. (0,5 pt)

2- Pour tout $x \in [\,0\,;\frac{1}{4}\,]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n(x) = 1 + 4x^2 + (4x^2)^2 + \cdots + (4x^2)^n$

Vérifier que $S_n(x) = \dfrac{1}{1-4x^2} - \dfrac{(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2}$ (0,5 pt)

3- En intégrant $S_n(x)$ sur l'intervalle $[\,0\,;\frac{1}{4}\,]$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3\times 4^2} + \frac{1}{5\times 4^3} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)\times 4^{n+1}} = \frac{1}{4}\ln 3 - I_n$$ (1 pt)

4- a) Démontrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{(n+2)\times 4^{n+2}} \leq I_n \leq \frac{1}{3(n+2)\times 4^{n+1}}$$ (1,5 pt)

b) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (0,25 pt)

5- Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3\times 4^2} + \frac{1}{5\times 4^3} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)\times 4^{n+1}}\right)$ (0,25 pt)