EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormal (O; i ; j), soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui associe à tout point M(x ; y) le point M'(x' ; y') défini par :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1-/ Déterminer l'ensemble D des points invariants par f

2-/ Montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à D et que le milieu de [MM'] appartient à D. Reconnaître f.

EXERCICE 2

Le plan étant muni d'un repère (O; I ; J). Donner l'expression analytique de :

1) L'homothétie h de centre A (–2 ; 3) ;
2) La translation t de vecteur $\vec{u}(-2\ ;\ 1)$;
3) La symétrie par rapport à la droite D d'équation : x + 2y = 0, parallèlement à la droite Δ d'équation : 2x – y = 0.
4) La projection p sur la droite d'équation D_1 : y = x parallèlement à la droite Δ_1 d'équation : x = 0.

EXERCICE 3

Le plan affine P est muni du repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$, soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui associe à tout point M(x ;y) le point M'(x' ; y') = f (M) défini par :

$$\begin{cases} x' = -x - y + 1 \\ y' = x \end{cases}$$

1) Montrer que f est une application affine.

2) Montrer que l'isobarycentre des points M, f (M) et f^2 (M)…($f^2 = f \circ f$) est indépendant de M.

EXERCICE 4

Le plan P étant muni d'un repère (O; I ; J). soit f l'application de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui associe à tout point M(x ;y) le point M'(x' ;y') défini par :

$$\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -2x - 3y - 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f est une application affine et qu'elle admet un seul point invariant.
2) Quelle est la nature géométrique de l'application $f \circ f$?. Caractériser $f \circ f \circ f \circ f$.
3) Soit M un point quelconque de P, on note : f(M)= M_1 ; f(M_1)=M_2 ; f(M_2)= M_3. Démontrer que l'isobarycentre des points M ; M_1 ; M_2 ; M_3 est le point invariant par f.

EXERCICE 5

Le plan P est muni d'un repère (O; I ; J). On considère l'application affine f de $\mathscr{P}$ dan $\mathscr{P}$ qui associe à tout point M(x ; y) le point M'(x' ; y') définie par :

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que pour tout point M, le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à un vecteur constant.
2) Etudier l'ensemble des points invariants par f.
3) Reconnaître la nature de l'application affine f.

EXERCICE 6

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère (O; I ; J). On considère l'application affine f de $\mathscr{P}$ dan $\mathscr{P}$ qui associe à tout point M(x ; y) le point M'(x' ; y') défini par :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x + 1 \\ y' = -\frac{3}{4}x + y + \frac{1}{2} \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble (E)des points invariants par f.
2) Montrer que si M n'est pas invariant, la droite (MM') garde une direction dépendante de M que l'on précisera.
3) Calculer les coordonnées du point M_1, intersection de (MM') et(E).
4) Reconnaître f et donner une construction géométrique de M'.

EXERCICE 7

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé (O; I ; J) ; on donne la droite (D) d'équation : 2x + 3y +5 = 0.

1) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S d'axe (D).
2) Déterminer l'expression analytique de la projection orthogonale p sur la droite (D).
3) Déterminer l'expression analytique de l'affinité f d'axe (D), dont la direction est orthogonale à celle de (D) et de rapport 5.

(on pourra remarquer que « $\overrightarrow{p(M)f(M)} = 5\overrightarrow{p(M)M}$ » équivaut à « le barycentre de (f(M),1) et (M,–5) appartient à (D) »).

EXERCICE 8

On considère l'espace E rapporté à un repère cartésien $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. Soit f l'application de E dans E qui associe à tout point M (x ;y ;z) de E le point M' (x';y';z') tel que :

$$\begin{cases} x' = -2x + z - 1 \\ y' = -x - y + z - 1 \\ z' = -2x - 4y + 3z - 2 \end{cases}$$

1) Montrer que f est une projection affine et donner les éléments caractéristiques de f.
2) Trouver l'image de la droite de E d'équations : $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{4}$
3) Trouver l'image du plan (T) de E d'équation : x + y – z + 5 = 0.

EXERCICE 9

Soit (O ;I ;J ;K) un repère orthonormé direct de E. Soit f l'application de E dans E qui associe à tout point M (x ; y ; z) de E le point M' (x'; y' ; z') tel que :

$$\begin{cases} x' = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \\ z' = z \end{cases}$$

1) Donner les images par f des quatre points A (2 ; 0 ; 0) ; B (–1 ; $\sqrt{3}$; 0) ; C (–1 ; –$\sqrt{3}$; 0) ; D (0 ; 0 ; 4).
2) Vérifier que ABC est un triangle équilatéral. Quelle est l'application affine du plan (ABC) dans lui-même qui donne pour images de A ; B ; C respectivement B ;C et A ?
3) Trouver une application affine r, d'un type étudié en cours, telle que r(A)=f(A) ; r(B)=f(B) ; r(C)=f(C) ; r(D)=f(D). Reconnaître l'application f.

EXERCICE 10

Soit dans un plan P rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ les points A (1 ; 1) B(0 ; 2) ; C(–1 ; 2) ; A'(1 ; 1) ; B'(1 ; –1) ; C'(0 ; 3).

1°) Montrer qu'il existe une application affine f unique de P dans P telle que : f (A) = A' ; f (B) = B' ; f (C) = C'.

2°) Calculer les coordonnées x' et y' du point M' image de M(x; y) par l'application f.

EXERCICE 11

Soit E l'espace rapporté à un repère cartésien $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. $\vec{E}$ l'espace vectoriel associé à E et rapporté à la base $(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$.
On considère l'application f de E dans E qui à tout point M (x ; y ; z) associe le point M' (x' ; y' ; z') tel que :

$$\begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - y + 2 \\ z' = y + z - 3 \end{cases}$$

1-/ Montrer que f est une application affine bijective.

2-/ Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

3-/ Soit P le plan d'équation : ax + by + cz + d = 0 (a ; b ; c) $\neq$ (0 ; 0 ; 0).
Déterminer P' = f(P).

4-/ Déterminer les plans P invariants par f, (c'est à dire f (P) = P).

5-/ Soit la droite D de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$$

Trouver une représentation paramétrique de f(D).

EXERCICE 12

Soit P un plan rapporté à un repère cartésien $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$. On considère l'application f de P dans P qui à tout point M (x ;y) associe le point M' (x' ;y') tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = \frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$$

1) Quelle est la nature de f ?

2) Donner les éléments caractéristiques de f.

EXERCICE 13

Soit E l'espace rapporté à un repère cartésien $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. Soit f l'application de E dans E qui associe à tout point M (x ; y ; z) de E le point M' (x'; y'; z') tel que : $x' = y' = z' = \frac{1}{4}(x+2y+z)$

1) Quelle est la nature de f ?. Donner les éléments qui la caractérisent.

2) Quelle est l'image de la droite (D) d'équation : $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{1}$.

EXERCICE 14

Dans un plan $\mathscr{P}$ rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,)$, soient les droites D et D_1

d'équations respectives : x + y –1 = 0 et 2x – y + 2 = 0.

Définir analytiquement les symétries S par rapport à D parallèlement à D_1 et S' par rapport à D_1 parallèlement à D. Étudier : $S' \circ S$ et $S \circ S'$.

EXERCICE 15

A-/ Soit E l'espace rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k}\,)$. On considère f l'application de E dans E définie analytiquement par :

$$\begin{cases} x' = 3x - 4z - 4 \\ y' = 2x - y - 2z - 2 \\ z' = 2x - 3z - 4 \end{cases}$$

1°) Quelle est la nature de f ?. Donner les élément s caractéristiques de f.

2°) Quelle est l'image de la droite passant par A(1 ; 0 ; 2) et de vecteur directeur $\vec{U}\,(1\,;\,2\,;3)$?

3°) Quelle est l'image du plan d'équation : x – z + 2 = 0 ?

B-/ Soit le plan P d'équation : x + y – z + 2 = 0 .
On désigne par S la symétrie par rapport à P parallèlement à la droite vectorielle de vecteur directeur $\vec{V}\,(1\,;\,2\,;\,1)$.

Calculer les coordonnées x' ; y' ; z' de S(M) en fonction des coordonnées x ; y ; z de M.

EXERCICE 16

Un plan affine euclidien P est rapporté au repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$. On considère dans ce plan l'application T, qui au point M(x ; y) associe le point

M'(x' ; y') défini par $\begin{cases} x' = k\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha\right)+1 \\ y' = k\left(x\cos\alpha - y\sin\alpha\right)+1 \end{cases}$

k et α sont des constantes données (on suppose k> 0 et 0 ≤ α ≤2π.

Partie I

Étudier suivant les valeurs de k et de α l'ensemble des points invariants par T. Cet ensemble peut-il être une droite ? Peut-il être vide ?

Partie II

On suppose maintenant l'étude de T dans le cas où k et α prennent des valeurs suivantes : k = 1 et $\alpha = \frac{4\pi}{3}$.

1°) Quel est l'ensemble des points invariants par T ?

2°) a) Quelle est l'image par T de la droite dont l 'équation est : x – $\sqrt{3}$ y = 0 ?

b) Quelle est l'image Δ' par T de la droite Δ passant par $I\left(\frac{3+\sqrt{3}}{8};\frac{1+\sqrt{3}}{8}\right)$ et dirigée par $\vec{u}\left(1\,;\sqrt{3}\right)$? Former les équations de Δ et de Δ' .

3°) On considère l'application linéaire φ associée à T.

a) Démontrer que φ est une bijection du plan vectoriel P associé à P dans lui-même ; étudier $\varphi \circ \varphi$.

b) Démontrer qu'il existe deux droites vectorielles globalement invariant par φ. Démontrer que $\vec{e_1}\left(\frac{1}{2}\,;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est une base normée de l'une de ces droites (que l'on appellera D_1). Déterminer une base normée $\vec{e_2}(b\,;c)$ de l'autre droite (Que l'on appellera (D_2) avec b >0.

c) Quels sont les transformées par φ respectivement des vecteurs de (D_1) et des vecteurs de (D_2) ?

– Écrire dans la base $\left(\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\right)$ la matrice de φ

– En déduire les formules définissant T dans le plan P rapporté cette fois au repère $\left(O\,;\vec{e_1}\,;\vec{e_2}\right)$.

d) Démontrer que T est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite, que l'on déterminera et d'une translation dont le vecteur admet la direction de l'axe de symétrie.

EXERCICE 17

Le plan affine euclidien étaient rapporté au repère orthonormé $\left(O;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$, on considère la transformation ponctuelle f, qui au point M(x ; y) fait correspondre le point M'(x' ; y') tel que $\begin{cases} x' = -x\cos 2\alpha - y\sin 2\alpha + 2\cos\alpha \\ y' = -x\sin 2\alpha + y\cos 2\alpha + 2\sin\alpha \end{cases}$

1°) Déterminer l'ensemble (D) des points doubles de f

2°) En déduire la nature géométrique de f.