Similitude plane : Fiche 6

Comment déterminer la similitude directe définie par la donnée de 2 points A, B et de leurs images A', B' avec A≠B ?

Méthode géométrique

- Déterminer le rapport $k = \frac{A'B'}{AB}$ **et l'angle** $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ **de la similitude à partir de la construction géométrique.**

- Le centre Ω de S est le point, autre que I, intersection des droites (AB) et (A'B'), commun aux cercles (IAA') et (IBB').

Exemples d'application

ABCD est un carré de sens direct et de centre I. K est le milieu de [CD]. Identifier la similitude directe S définie par S(A) = I et S(C) = K.
1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.
2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AD], Γ_2 est le cercle de diamètre [IC].
Démontrer que Ω est le point d'intersection, autre que I, des cercles Γ_1 et Γ_2.

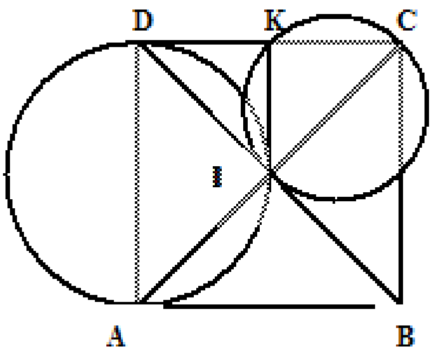
Rappel : Les points A, B, M, et N appartiennent au même cercle (Γ) si
$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})\ [\pi]$

Réponses non détaillées :

1 - Rapport et centre de S

On utilise la construction pour calculer les distances AC et IK, puis l'angle $(\overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{IK})$.

On rappelle que la longueur de la diagonale d'un carré de côté a est $a\sqrt{2}$ ***.***



S est la similitude directe :

- de rapport $k = \frac{IK}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,
- d'angle $\theta = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{4}$.

θ est l'angle des demi-droites orientées (AC) et (IK)

2 - Détermination du centre Ω de la similitude S.

On construit 2 cercles dont l'un des points d'intersection est le centre Ω.
On fait apparaître dans ces cercles l'angle θ de la similitude.

. On considère le cercle (Γ_1) de diamètre AD. On a $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DI}) = \frac{\pi}{4}$.

Comme S(A) = I, on a $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) = \frac{\pi}{4}$. Donc Ω appartient au cercle (Γ_1).

. De même, en considérant le cercle (Γ_2) de diamètre IC, on a $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{4}$.

Comme S(C) = K, on a $(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega K}) = \frac{\pi}{4}$. Donc, appartient au cercle (Γ_2).

D'où le point Ω appartient à la fois à (Γ_1) et à (Γ_2).
Alors le centre Ω de S est le point, autre que I, commun aux cercles (Γ_1) et (Γ_2).

Exercices proposés

- **Exercice 1 :**

  ABC est un triangle isocèle rectangle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}$.

  A' est le symétrique de A par rapport à C.
  1 – Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s qui transforme A' en C et C en B.
  2 – Quelle est l'image de la droite (AC) par s ?
  3 – Soit Ω le centre de s. Démontrer que ΩCB est rectangle isocèle.
  En déduire une construction de Ω.

- **Exercice 2 :**

  ABCD est un carré direct de centre I et de côté AB = d. Soit J le milieu du segment [CD].
  On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

  1. Faire une construction que l'on complètera au fur est à mesure. On prendra AB = 6 cm.
  2. a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.
  b) On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI], Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ].
  Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.
  3. a) Donner l'image par s de la droite (BC).
  b) En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.
  4. On pose h = s o s (composée de s avec elle-même).
  a) Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).

b) Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

- **Exercice 3 :**

On considère les rectangles directs OABC et ABDE tels que OA = 4 cm, OC = 6 cm et OE = 5cm.
On admet que deux rectangles sont semblables si et seulement si le rapport de la longueur sur la largeur est le même pour les deux rectangles.
1. a) Construire les rectangles OABC et ABDE.
b) Démontrer que OABC et ABDE sont semblables.
2. Soit S la similitude directe qui transforme O en A et A en B.
a) Déterminer le rapport et l'angle de S.
b) Démontrer S transforme OABC en ABDE.
3. Soit Ω le centre de cette similitude.
a) Montrer que la composée S o S est une homothétie.
b) Déterminer S o S (O) et S o S(A).
c) En déduire que le point Ω appartient aux droites (OB) et (AD).
d) En déduire la position de Ω et le placer sur la figure.

- **Exercice 4 :**

On considère les carrés OABC et OCDE tels que : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OE})=\frac{\pi}{2}$.

On désigne par I le milieu du segment [CD], par J le milieu du segment [OC] et par H le point d'intersection des segments [AD] et [IE].
1. Faire une figure en prenant OA = 4 cm.
2. Justifier l'existence d'une similitude directe S transformant A en I et D en E.
Déterminer le rapport et l'angle de S.
3. Déterminer l'image de B par S. Déterminer et placer l'image de C par S.
4. a. Soit Ω le centre de la similitude s. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AI] et à celui de diamètre [DE].
b. Montrer que Ω ne peut être le point H. Construire Ω.

- **Exercice 5 :**

OAB est un triangle rectangle en O tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})=\frac{\pi}{2}$.

1. On note encore S est la similitude directe telle que S(O) = A et S(B) = O. Soit Ω son centre.
a. Déterminer le rapport et l'angle de S.
b. Démontrer que Ω appartient au cercle de diamètre [OA]. Et que Ω appartient aussi au cercle de diamètre [OB].
En déduire que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB.
2. On désigne par D une droite passant par O, distincte des droites (OA) et (OB). On note A' et B' les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur la droite D.
a. Déterminer les images des droites (BB') et D par la similitude S.
b. Déterminer le point S(B').
c. En déduire que le point Ω appartient au cercle de diamètre [A'B'].

- **Exercice 6 :**

OABC est un carré de centre I tel que $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\frac{\pi}{2}$. On désigne par J le milieu de [OI].

On pose OA = d.
Soit f la similitude directe telle que f(O) = I et f(A) = J.

1- Déterminer le rapport et l’angle de f.
2- Construire le point C' = f(C). Déterminer f(B).
3- Soit Ω le centre de f. Montrer que Ω, O, I, C appartiennent à un même cercle.
Même question pour Ω, O, A, J. En déduire une construction de Ω.
Montrer que les droites ($O\Omega$) et (ΩC) sont perpendiculaires.