# Suites et intégrales (2)

**Exercice 1** : n étant un entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$.

1. On pose $F(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Calculer F '(x), en déduire $I_1$.

2. En utilisant une intégration par parties montrer que : $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$.

Montrer par récurrence que, pour tout n entier naturel non nul : $\frac{1}{n!}I_n = 1 - \frac{1}{e}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)$

3. En utilisant un encadrement de ln x sur [1 ; e], montrer que, pour tout n entier naturel non nul :
$0 \leq I_n \leq 1$

4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}\right)$.

**Exercice 2** : On pose $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} dx$.

1. Calculer $u_0$. Calculer $u_3$ à l'aide d'une intégration par parties. (Remarquer que $\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} = x^2 \times \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ).

2. Montrer que, pour tout x de l'intervalle [0 ; 1], $0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$.

En intégrant cette double inégalité sur [0 ; 1], montrer que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.

**Exercice 3** : Soit f la fonction définie, pour x > 0, par : $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$.

Sans calculer explicitement $u_n$, déterminer le signe de $u_{n+1} - u_n$.

En déduire que la suite $(u_n)$ est croissante.

2. Démontrer que la fonction h, définie sur ] 0 ; + ∞ [ par : $h(x) = (x+1)\, e^{-\frac{1}{x}}$, est primitive de f sur ]0 ; +∞[.

3. Calculer $u_n$. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Étudier la convergence de la suite $(u_n)$.

**Exercice 4** : Pour tout entier n de N*, on considère l'intégrale : $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$.

1. a) Démontrer que, pour tout x dans l'intervalle ]1, e[, et pour tout n entier naturel, on a :
$(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$
b) En déduire que la suite $(I_n)$ est décroissante.
2. a) Calculer $I_1$ à l'aide d'une intégration par parties.
b) Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in N^*$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$.
c) En déduire $I_2$, $I_3$ et $I_4$. Donner les valeurs exactes, exprimées en fonction de e, et les valeurs approchées à $10^{-3}$ près par défaut.

3. a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, I_n \geq 0$.

b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, (n+1)I_n \leq e$.

c) En déduire la limite de $I_n$.

d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de $n\,I_n$.

**Exercice 5** : 1. On considère la fonction définie pour tout réel positif par : $f(x) = \dfrac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$. Déterminer une primitive F de f sur $]0\,;+\infty[$

3. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

a) Calculer $v_0$, $v_1$ et $v_2$. On donnera des valeurs décimales approchées à $10^{-2}$ près de $v_0$, $v_1$ et $v_2$.

c) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$.

En déduire la monotonie de la suite $(v_n)$ à partir de n = 1.

d) Déterminer la limite de la suite $(v_n)$.

**Exercice 6** : Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

On considère la suite $(u_n)$ définie par : $u_n = \int_0^2 \dfrac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt$

1.a) Soit $\varphi$ la fonction définie sur [0;2] par : $\varphi(t) = \dfrac{2t+3}{t+2}$. Étudier les variations de $\varphi$ sur [0;2].

En déduire que, pour tout réel t dans [0;2], $\dfrac{3}{2} \leq \varphi(t) \leq \dfrac{7}{4}$

b) Montrer que, pour tout réel t dans [0;2],on a : $\dfrac{3}{2}e^{\frac{t}{n}} \leq \varphi(t)e^{\frac{t}{n}} \leq \dfrac{7}{4}e^{\frac{t}{n}}$

c) Par intégration en déduire que : $\dfrac{3}{2}n(e^{\frac{2}{n}}-1) \leq u_n \leq \dfrac{7}{4}n(e^{\frac{2}{n}}-1)$

d) On rappelle que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h-1}{h} = 1$. Montrer que, si $(u_n)$ possède une limite L, alors $3 \leq L \leq \dfrac{7}{2}$.

2.a) Vérifier que, pour tout t dans [0;2], on a $\dfrac{2t+3}{t+2} = 2 - \dfrac{1}{t+2}$.

En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \dfrac{2t+3}{t+2}dt$.

b) Montrer que, pour tout t dans [0, 2], on a $1 \leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. En déduire que $I \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} I$.

c) Montrer que $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite L.

**Exercice 7** : 1. Montrer les inégalités suivantes :

a. Pour tout réel t, $e^t \geq t + 1$, $e^t > t$ et $-te^{-t} > -1$.

b. Pour tout réel tel que $t > -1$, $\ln(1 + t) \leq t$.

c. En déduire que pour tout réel x, $\ln(1 - x\,e^{-x}) < -x\,e^{-x}$

2. Soit n un entier naturel, on pose $u_n = \int_0^n xe^{-x}dx$.

a. Démontrer que la suite u de terme général $u_n$ est croissante.

b. Calculer $u_n$ à l'aide d'une intégration par parties.
c. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

3. Soit $I_n = -2\int_0^n \ln(1-xe^{-x})dx$.

a. Montrer en utilisant la question 1. que $I_n \geq 2u_n$
b. On admet que la suite $(I_n)$ a pour limite l. Montrer que $l \geq 2$.

**Exercice 8** : On considère la fonction numérique f, de la variable réelle x, définie sur R par :

$$f(x) = e^{-x}\sin x.$$

A- 1. En calculant les dérivées successives de la fonction f jusqu'à l'ordre 4, trouver une relation entre la fonction f et sa dérivée d'ordre 4 notée $f^{(4)}$.

2. En déduire qu'on peut choisir $F(x) = -\frac{1}{4}f^{(3)}(x)$.

3. On pose $I = \int_0^\pi e^{-x}\sin x\,dx$. Montrer que $I = \frac{e^{-\pi}+1}{2}$.

B - Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x)\,dx$.

1. Vérifier que $I_0 = I$ et interpréter $I_0$ comme l'aire d'un domaine plan. Hachurer ce domaine.

2. Montrer que, pour tout naturel n, $I_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2}(e^{-\pi}+1)$.

3. Prouver que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique.

Calculer sa raison.
4. Prouver que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge et préciser sa limite.

**Exercice 9** : On considère la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$.

A - Soit $(I_n)$ la suite définie sur IN par : $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$.

1. Justifier l'existence de $I_n$ et donner une interprétation géométrique de $I_n$.
2. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $f(n+1) \leq I_n \leq f(n)$.
b) En déduire que la suite $(I_n)$ est décroissante.
c) Démontrer que la suite $(I_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

B - Soit $(J_n)$ la suite définie sur IN par : $J_n = \int_0^n f(x)dx$.

1. a) Montrer que pour tout réel positif ou nul : $\frac{1}{e^x} \leq f(x) \leq \frac{1}{2e^x}$.

b) En utilisant l'encadrement précédent, démontrer que, pour tout entier naturel n,

$\frac{1}{2}(1-e^{-n}) \leq J_n \leq (1-e^{-n}) \leq 1$.

2. Démontrer que la suite $(J_n)$ est croissante. En déduire qu'elle converge.
3. On note L la limite de la suite $(J_n)$. Donner un encadrement de L.

4. Soit u la fonction définie sur IR par $u(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

On note U la primitive de u sur IR telle que $U(1) = \frac{\pi}{4}$.

On admet que la courbe représentative de U admet en +∞ une asymptote d'équation $y = \frac{\pi}{2}$.

a) Démontrer que, pour tout réel x, $f(x) = \frac{e^x}{(e^x)^2 + 1}$

b) Démontrer que, pour tout réel x, f est la dérivée de la fonction $x \mapsto U(e^x)$.
c) En déduire la valeur exacte de L.

**Exercice 10** : On considère les fonction $f_n$, définies sur [ 0 ; 1 ] par $f_n(x) = \frac{2x^n}{1+x}$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. On pose $I_n = \int_0^1 (x - f_n(x))dx$ et $u_n = \int_0^1 f_n(x)dx$. Prouver que $I_n = \frac{1}{2} - u_n$.

b. Comparer $\frac{t^{n+1}}{1+t}$ et $\frac{t^n}{1+t}$ sur l'intervalle [0 ; 1] ; en déduire que la suite ($u_n$) est décroissante.

c. Prouver que pour tout réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 1], $0 \le \frac{t^{n+1}}{1+t} \le t^n$.

d. En déduire que pour tout entier naturel $n \ge 2$, $0 \le u_n \le \frac{2}{n+1}$.

e. Déterminer alors la limite de $I_n$ quand n tend vers l'infini.

**Exercice 11** : On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_0 = \int_1^e x\,dx$ et $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$ lorsque n>0.

1. Calculer $I_0$ et $I_1$
2. Étudier le sens de variation de cette suite
3. Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une formule de récurrence entre In et In-1
4. Déduire des variations de la suite et de la relation de récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{e^2}{n+3} \le I_n \le \frac{e^2}{n+2}$, et conclure pour la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

**Exercice 12** : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. définie pour tout entier naturel n non nul par :

$u_n = \int x^n \ln(1+x)dx$.

1. Étude de la convergence

a. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \le u_n \le \frac{\ln 2}{n+1}$.,

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

2. Calcul de $u_1$.

a. En remarquant que $\frac{x^2}{1+x} = x + 1 + \frac{1}{1+x}$, calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}dx$.

b. Calculer $u_1$ au moyen d'une intégration par parties.
3. Calcul de $u_n$

Pour tout entier $n \ge 2$ et pour tout réel x de [0 ; 1], on pose : $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$ (1)

a. Justifier que $S_n(x)=\frac{1}{1+x}-(-1)^{n+1}\ \frac{x^{n+1}}{1+x}$ (2)

b. En intégrant successivement les égalités (1) et (2), établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln 2-(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

c. En utilisant une intégration par parties et le résultat précédent, démontrer que

$$u_n=\frac{\ln 2}{n+1}-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left(\ln 2-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\right).$$

**Exercice 13** : On considère la suite d'intégrales définie pour tout entier naturel n par : $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin 3x\,dx$ et

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{6}}x^n\sin 3x\,dx$$

1. a. Calculer $I_0$.

b. En utilisant une intégration par parties, calculer $I_1$.

2. a. En effectuant deux intégrations par parties successives, déterminer lorsque n > 1, une expression de $I_{n+2}$ en fonction de $I_n$.

b. Vérifier que : $I_n=\frac{\pi^2}{108}-\frac{2}{27}$.

3. Sans calculer l'intégrale $I_n$ :

a. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

b. Montrer que pour tout nombre entier naturel non nul n : $0\le I_n\le\int_0^{\frac{\pi}{6}}x^n dx$

c. En déduire : lim $I_n$.

**Exercice 14** : A- On considère la suite ($u_n$) définie par : pour tout entier naturel n non nul, $u_n=\int_0^1(1-t)^n e^t dt$.

1. Montrer que la fonction $f:t\mapsto(2-t)e^t$ est une primitive de $f:t\mapsto(1-t)e^t$ sur [0 ; 1]. En déduire la valeur de $u_1$.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout n non nul, $u_{n+1}=(n+1)u_n-1$ (R ).

B- Dans cette partie on se propose d'étudier la suite ($u_n$)

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n\ge 0$.

2. a. Montrer que pour tout réel t de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul n, $(1-t)^n e^t\le(1-t)^n e$.

b. En déduire que pour tout n non nul, $u_n\le\frac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite ($u_n$).

C- Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite ($u_n$) : $u_{n+1}=(n+1)u_n-1$.

Étant donné un réel a, on considère la suite ($v_n$) définie par : $v_1$ = a et pour tout entier naturel non nul n, $v_{n+1}=(n+1)v_n-1$.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul n, $v_n=u_n+(n!)(a+2-e)$ où n! désigne le produit des n premiers entiers naturels non nuls.

2. Étudier le comportement de la suite ($v_n$) à l'infini suivant les valeurs de a. (On rappelle que $\lim\limits_{n\to+\infty} n!=+\infty$.)