Suites et Intégrales (1)

Exercice 1- On considère la suite (u_n) sur IN* par $u_1 = \frac{3}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

1.- a) Montrer que, pour tout n, $u_n > 0$.
b) Montrer que si (u_n) est convergente , alors nécessairement $\lim (u_n) = \sqrt{2}$.

2.-a) Démontrer l'égalité $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}\frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n}$. Déduisez-en que pour tout n , $u_n > \sqrt{2}$.

b) Démontrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2}) + \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\sqrt{2}}$. En déduire que $u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})$.

3.- Démontrer que $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n$. En déduire que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$.

4.- Montrer que $u_n - \sqrt{2} < \frac{1}{2^{n-1}}(u_1 - \sqrt{2})$; Retrouver ainsi que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$

Exercice 2- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1+u_n}{1+2u_n}$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que $u_n > 0$ pour tout n et que la suite (u_n) et croissante.
3. Montrer que, quel que soit $n > 0$, $u_n > u_{n-1} + \frac{1}{2}$. En déduire que $u_n > 1 + \frac{n}{2}$.

La suite est-elle convergente ou divergente ?

Exercice 3- Soit f_n la fonction définie par $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$ où $n > 1$. Déterminer la primitive F_n de qui s'annule en 1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(\frac{1}{2})$

Exercice 4- Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = \sin x + \sin^3 x$.
1 ° Calculer f ' (x) et f ''(x) et montrer qu'il existe deux constantes a et b (que l'on déterminera) telles que f ''(x) + a f (x) = b sinx pour tout x.
2° En déduire une primitive de f.

Exercice 5- Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Justifier et calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

Exercice 6- 1° Soit λ un nombre réel strictement positif. Calculer $I(\lambda) = \int_0^{\lambda} \frac{2x dx}{(x^2+1)^3}$.

Calculer la limite éventuelle de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers + ∞.

2° Même question avec $I(\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+2}} dx$.

Exercice 7- 1- a) Montrer que $f : x \mapsto f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos t} dt$ est définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

b) Calculer f '(x) et étudier le sens de variation de f.

2- Mêmes questions pour $f(x) = \int_1^x \sqrt{1+t^2} dt$ et $f(x) = \int_x^3 \frac{1}{1+t^2} dt$.

Exercice 8 - Soir (u_n) la suite définie par $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - .... + \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. On se propose d'établir que (u_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$. Soit la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

A - 1° Justifier la dérivabilité de F et calculer F' .

2° Soit u la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par u (x) = F (tan x). Calculer u'(x) pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. En déduire que u(x) = x pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.

B- 1° Montrer que, pour tout réel t : $(1 - t^2 + t^4 + ...+ (-1)^n t^{2n}) - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

2° En déduire, à l'aide d'une intégration, que : $u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.

3° Montrer que pour tout réel t de [0 , 1], on a : $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n+2}$. **(1)**

En déduire que $\left| u_n - \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{2n+3}$. Conclure.

Exercice 9 -1 - Calculer la valeur moyenne de

a) $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ sur [0,8]

b) $g : x \mapsto \frac{1}{x^2}$ sur [1,2] puis sur $[\frac{1}{n}, 1]$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 10 - Calculer $\int_a^t \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

En déduire, en effectuant une intégration par parties

$I = \int_a^t \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$ et $J = \int_0^{\pi/4} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx$

Exercice 11 - Soit $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$, $n \in \mathbb{N}$

1) Calculer I_0 et I_1.

2) En effectuant une intégration par parties, montrer que pour $n \geq 2$ $n I_n = (n-1) I_{n-2}$.

En déduire I_{2p} et I_{2p+1}

3) Montrer que (I_n) est décroissante.

4) En utilisant les inégalités $I_n < I_{n-1} < I_{n-2}$., trouver la limite de $\frac{I_{n-1}}{I_n}$ quand n tend vers $+\infty$

5) Montrer que pour tout n au moins égal à 1, $n\, I_n\, I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$

En déduire les limites de I_n et $I_n\sqrt{n}$ quand n tend vers $+\infty$
En déduire que (u_n) est convergente.