Fonction exponentielle népérienne : série n°2

Exercice 1 – Calculer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{x+1}}{x}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x}$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{3x}-1}{3x}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(e^x+1)}{x^2+1}$

$\lim\limits_{x\to1} \frac{e^x-e}{x-1}$ $\quad \lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}}$ $\quad \lim\limits_{x\to0} \frac{e^{x+3}-e^3}{x^2+x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+2}$ $\quad \lim\limits_{x\to0} \frac{e^{\sin x}-1}{\sin x}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x^2-1}} - e^x$

$\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{x^2}-1}{x}$ $\quad \lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(e^x+x)}{x}$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x}$

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$f(x) = xe^x - e^{-x}$ $\quad f(x) = (e^x)^2$ $\quad f(x) = e^{2x^2-x+1}$

$f(x) = \sqrt{e^x-1}$ $\quad f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ $\quad f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+2}$

$f(x) = \ln(e^x+e^{-x})$ $\quad f(x) = e^{\sin x}$ $\quad f(x) = e^{\ln x^2 - \ln x + 2}$

Exercice 3

Pour chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est continue au point x_0 indiqué, puis étudier la dérivabilité de f en ce point x_0 :

$f(x) = x.e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$, $x_0 = 0$ $\quad f(x) = \frac{x^2}{e^x-1}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$, $x_0 = 0$

$f(x) = e^x + x(\ln x - 1)$ si $x > 0$ et $f(0) = 1$, $x_0 = 0$ $\quad f(x) = \frac{\ln(e^x+1)}{x}$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 1$, $x_0 = 0$

Exercice 7

Déterminer toutes les primitives de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = e^{-x}$ $\quad f(x) = 2xe^x$ $\quad f(x) = (2x+1)\,e^{x^2+x-3}$

$f(x) = \frac{e^{3x}+1}{e^x}$ $\quad f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ $\quad f(x) = \frac{e^x+1}{e^x+x}$

$f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$ $\quad f(x) = \cos x.e^{\sin x}$ $\quad f(x) = e^x\sqrt{e^x+2}$

Exercice 8

1.- Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 e^{2x-1}dx \quad ; \quad \int_0^1 xe^{-x^2}dx \quad ; \quad \int_2^3 \frac{e^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2}dx \ ;$$

$$\int_{-1}^0 \frac{2x+3}{e^{x+1}}dx \quad \int_0^1 \frac{1+e^x}{\sqrt{(e^x+x)^3}}dx \quad \int_0^1 \frac{e^{2x}}{(1+e^{2x})\ln(1+e^{2x})}dx$$

2.- a) Montrer que $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b) Calculer alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{e^x+1}dx$.

Exercice 9

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie: $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx$; $\displaystyle\int_0^1 (x-1)e^{2x}dx$

Exercice 10

On pose $\mathbf{I} = \displaystyle\int_0^1 e^x \cos^2 x dx$ et $\mathbf{J} = \displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 x dx$

1.- Calculer I+J.

2.- Calculer I-J à l'aide d'une intégration par parties.

En déduire les valeurs de I et de J

Exercice 11

Calculer les intégrales suivantes à l'aide de deux intégrations par parties successives:

$$\int_0^1 x^2e^{2x}dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} e^x \sin x.dx$$