Exponentielle népérienne : série n°3

Exercice 1

Etudier les variations et tracer la courbe de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = e^{x^2 - x}$ b) $f(x) = e^{x^2 - x}$ c) $f(x) = e^x + e^{-x}$

d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ e) $f(x) = x + \ln(2 - e^x)$ f) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-2}} - 1$

g) $f(x) = e^{-x^2}$ h) $f(x) = x\,e^x$ i) $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x}}$

j) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$ k) $f(x) = e^{|x|}$ l) $\mathbf{f(x) = e^x - 2x + 1}$

Exercice 2

1.- Soit g la fonction définie par $\mathbf{g(x) = (x-1)e^x + 1}$

a) Etudier les variations de g et dresser le tableau de variation de g sans étudier ses limites.

b) En déduire le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

2.-Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = (x-2)e^x + x}$

a) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) Calculer f'(x) et en utilisant le résultat de 1.- dresser le tableau de variations de f.

c) Etudier les branches infinies de la courbe C de f.

d) Tracer la courbe de f avec son asymptote

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $\mathbf{f(x) = x + 1 + \dfrac{e^x - 3}{e^x + 1}}$

1.- Déterminer l'ensemble de définition D de f.

2.- Calculer les limites de f aux bornes de son domaine définition D.

3.- Calculer f'(x) et dresser le tableau de variation de f.

4.-a) Montrer que pour tout x, $\mathbf{f(x) = x - 2 + \dfrac{4e^x}{e^x + 1}}$ et $\mathbf{f(x) = x + 2 - \dfrac{4}{e^x + 1}}$.

b) Montrer que les droites d'équations y = x-2 et y = x+2 sont asymptotes à C.

5.- a) Calculer f''(x) et étudier son signe.

b) En déduire que la courbe admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.

c) Donner l'équation de la tangente à C au point I.

6. Tracer la courbe de f avec ses asymptotes et la tangente en I.

Exercice 4

On définit la fonction numérique f sur IR par : $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^{x}$. On appelle (C) la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2cm.

1°) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 2e^{x} - x - 2$.

a) Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

b) Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.

2°) On admet que l'équation g(x) = 0 a exactement 2 solutions réelles.

a) Vérifier que 0 est l'une de ces solutions.

b) L'autre solution est appelée α . Montrer que $-2 \leq \alpha \leq -1$.

3°) Etudier le signe de g(x) suivants les valeurs du réel x.

4°) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$.

5°) a) Calculer f'(x) et montrer que f'(x) et g(x) ont même signe.

b) Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$ et donner le tableau de variation de f.

6°) Tracer la courbe (C).

Exercice 5

Soit g la fonction définie par $g(x) = (x-1)e^{-x} + 2$.

1.- a) Etudier les variations de g.

b) Montrer que h s'annule une seule fois en un réel, que l'on va noter α.

c) Montrer que $0{,}3 < \alpha < 0{,}4$.

d) Donner le signe de g(x) suivant les valeurs de x.

2.- Soit f la fonction définie par $f(x) = 2x + 1 - xe^{-x}$ et soit C la courbe représentative de f.

a) Etudier les variations de f.

b) Donner l'équation de la tangente à C en 0 puis en 1.

c) Montrer que la droite D d'équation y= 2x+1 est asymptote à C, et étudier la position de C par rapport à D.

d) Tracer D, les tangentes en 1 et en 0 et C.

Exercice 6

1.- Démontrer que pour tout $x \in$ IR ; $-1 < \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} < 1$

2.- Etudier les variations de f : $x \mapsto f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ et tracer sa courbe représentative.

3.- a) Montrer que f admet un réciproque g.

b) Pour un y donné dans]-1,1[, calculer g(y).

c) Montrer que g est dérivables sur]-1,1[et calculer g ' (y).

Exercice 7

Partie A

Soit g la fonction définie par $g(x) = e^{x}(1 - x) + 1$

1.- Etudier le sens de variation de g.

2. Démontrer que l'équation g(x)=0 admet une solution unique dans l'intervalle **[1,27 ; 1,28]** ; on note α cette solution

3.- a) Déterminer le signe de g(x) sur $]-\infty ; 0]$.

b) Justifier que g(x) > 0 sur $[0 ; \alpha[$ et g(x) < 0 sur $]\alpha ; +\infty[$.

Partie B

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x}{e^{x}+1}+2$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i}\ ;\ \vec{j})$

1.- Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter ce résultat.
2.- a) Déterminer la limite de f en $-\infty$
    b) Démontrer que la droite (D) d'équation y = x+2 est une asymptote pour (C).
    c) Etudier la position de (C) par rapport à (D)
3.- a) Montrer que f '(x) et g(x) sont de même signe.
    b) Montrer que $f(\alpha)=\alpha+1$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$
    c) Dresser le tableau de variation de f.
4.- Tracer la courbe (C)

Exercice 8

Dans cet exercice, on se propose d'encadrer l'intégrale $K=\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x}dx$

1.- En étudiant les variations des fonctions g et h définies sur l'intervalle [0 ; 1], par : $g(x)=e^{-x}+x-1$ et $h(x)=1-x+\frac{x^2}{2}-e^{-x}$, démontrer que $1-x\leq e^{-x}\leq 1-x+\frac{x^2}{2}$

2.- Déduire de 1.- un encadrement de e^{-x^2} pour x élément de [0 ; 1] puis montrer que pour tout x de [0 ; 1] , on a $1-x\leq\frac{e^{-x^2}}{1+x}\leq 1-x+\frac{x^4}{2(1+x)}$.

3.- a) Montrer que pour tout x de [0 ; 1]: $\frac{x^4}{1+x}=x^3-x^2+x-1+\frac{1}{1+x}$

    b) déduire alors de 2. que $\frac{1}{2}\leq K\leq\frac{5}{24}+\frac{\ln 2}{2}$.

Exercice 9

Ne connaissant pas de primitive de la fonction f définie par $f(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$, on se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I=\int_0^{1/2}\frac{e^{-x}}{1-x}dx$.

1.- Montrer que pour tout réel x de $[0\ ;\ \frac{1}{2}]$, $1\leq f(x)\leq\frac{2}{\sqrt{e}}$.

2.- a) démontrer que pour tout x de $[0;\frac{1}{2}]$, $\frac{1}{1-x}=1+x+\frac{x^2}{1-x}$..

    b) En déduire que $I=\int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}dx+\int_0^{1/2}x^2f(x)dx$.

    c) Calculer $J=\int_0^{1/2}(1+x)e^{-x}dx$.

    d) Déduire de 1) que $\frac{1}{24}\leq\int_0^{1/2}x^2f(x)dx\leq\frac{1}{12\sqrt{e}}$.

    Déduire des résultats précédents une valeur décimale approchée de I à 0,01 près