APPLICATIONS DU PLAN

1. Notion

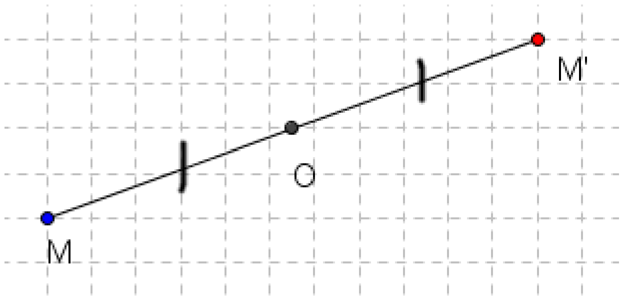
la symétrie centrale , la symétrie orthogonale et la translation sont des applications du plan dans le plan.

1.1 Symétries

1.1.1 Symétrie centrale

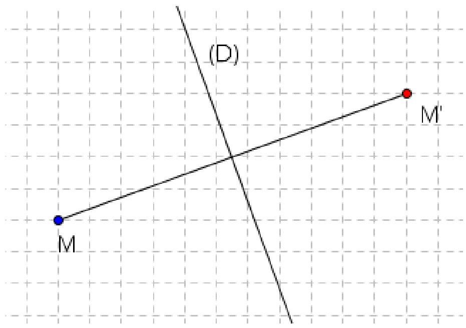
La symétrie centrale de centre O est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que O soit le milieu du segment [MM']

Si on note par S_O la symétrie centrale de centre O. M' est le symétrique de M par rapport à O.



1.1.2 Symétrie orthogonale

La symétrie orthogonale d'axe (D) est l'application du plan qui à tout point M associe le point M' tel que (D) soit la médiatrice du segment [MM'].

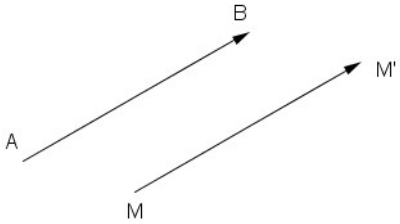


1.1.3 Translation

La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application du plan qui transforme le point M au point M' tel que

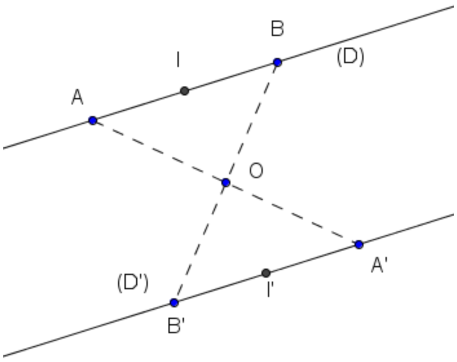
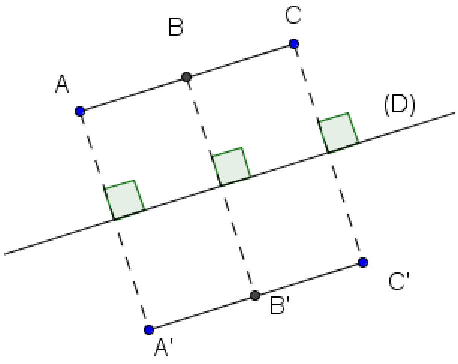
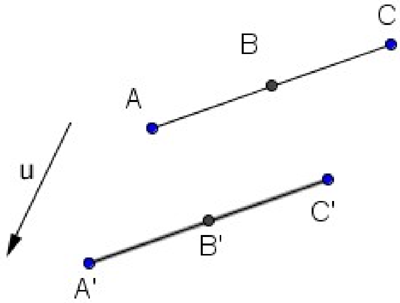
$$\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$$

Si $\vec{u}$ = $\overrightarrow{AB}$, M' est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ si AMM'B est un parallélogramme.



2. Propriétés

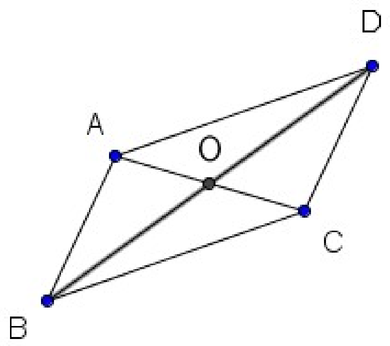
Le tableau suivant résume les propriétés des symétries et translation.

<table>
<tr><th>Par une symétrie centrale</th><th>Par une symétrie orthogonale</th><th>Par une translation</th></tr>
<tr><td colspan="3">- Des points alignés ont pour image des ponts alignés
-une droite a pour image une droite
-un segment a pour image un segment de même longueur
- Le milieu d’un segment a pour image le milieu de l’image de ce segment
-une figure a pour image une figure qui lui est superposable</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="3">-Deux droites parallèles ont pour image deux droites parallèles.
-Un cercle a pour image un cercle de même rayon.
-Un angle a pour image un angle de même mesure.
-Deux droites perpendiculaires ont pour image deux droites perpendiculaires.
-Pour un point intersection de deux lignes, son image est l’intersection des images des deux lignes.</td></tr>
</table>

3. Utilisation de la symétrie et de la translation

3.1 Des symétries et des translations pour démontrer

Soit ABCD un parallélogramme de centre O.

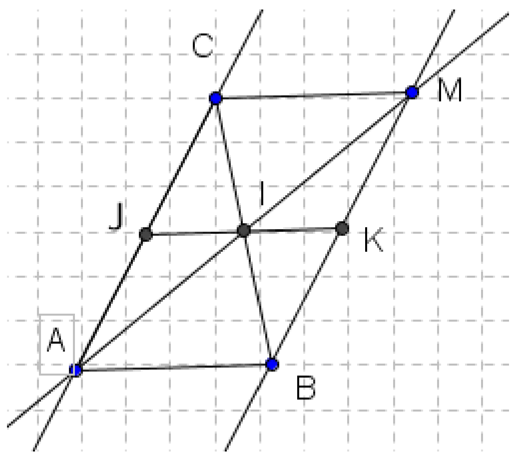


Avec la symétrie centrale S_O de centre O, on peut dresser le tableau de correspondance suivant :

M	O	A	B	C	D
M' = S_O(M)	O	C	D	A	B

Exercice

Soient A, B, C trois points non alignés, I et J le milieux de [BC] et [AC]. Soit K le symétrique de J par rapport à I. Montrer que les droites (BK) et (AC) sont parallèles, et les droites (BK) et (AI) sont sécantes



(1) Considérons le quadrilatère BKCJ. Leur diagonale [BC] et [JK] ont le point I comme milieu. BKCJ.est alors un parallélogramme. Ainsi, (CJ) // (CJ) et comme les droites (CJ) et (CA) son confondues, on a le résultat.

(2) Soit M le symétrique A par I. Alors I est aussi milieu des segments [BC] et [AM]. BMCA est un parallélogramme donc M est l'intersection des droites (AI) et (BK)

3.2 Des symétries et des translations pour construire

ABC est un triangle rectangle en A. La droite (D) est la médiatrice de [BC]. Construire le triangle BEC rectangle en E tel que les image par $S_{(D)}$ Des droites (BA) et (CA) sont(CE) et (BE)

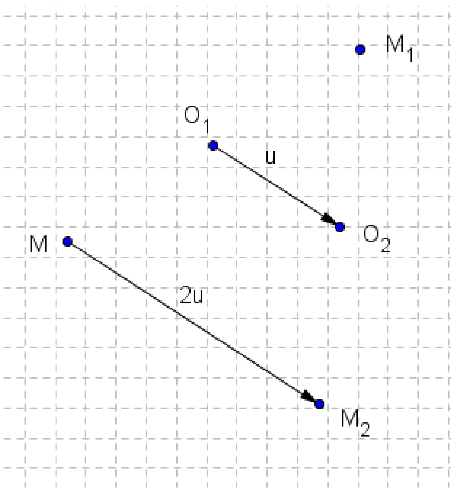
- Programme de construction
- Construire le triangle ABC rectangle en A.
- Construire (D).
- Construire le point E image de A par S(D)

- on trace le segment [CE]
- on obtient le triangle BEC

4. Composée de deux applications du plan

4.1 Composée de deux symétries centrales

- M, O_1, O_2 sont trois points non alignés du plan
- Construire l'image M_1 de M par la symétrie centrale de centre O_1.
- Construire l'image M_2 de M_1 par la symétrie centrale de centre O_2.
- Construire le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{O_1O_2}$
- Construire le vecteur $2\vec{u}$ d'origine M
- Qu'est ce qu'on constate ?



la composée de deux symétries centrale de centre O_1 et O_2 est la translation de vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$

4.2 Composée de deux symétries orthogonales

4.2.1 Composée de deux symétries orthogonales d'axes parallèles

Programme de construction

- Construire deux droites parallèles (D) et (D')
- choisir un point A sur (D)
- Choisir un point B sur (D') puis le vecteur $\overrightarrow{AB}$ normale aux deux droites
- Construire l'image M_1 de M par S(D)
- Construire l'image M_2 de M par S(D)
- Construire le vecteur u = $2\overrightarrow{AB}$ d'origine M
- Qu'est ce qu'on constate ?

La composée de deux symétries orthogonales d’axe (D) et (D’) parallèles est un translation de vecteur $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB}$ où A est un point de (D) et B un point de (D’) tel que $\overrightarrow{AB}$ est normale au deux droites.

4.2.2 Composée de deux symétries orthogonales d’axes perpendiculaires

Programme de construction

- Construire deux droites perpendiculaires (D) et (D’) sécantes en O
- Construire l’image M_1 de M par S(D’)
- Construire l’image M_2 de M par S(D’
- Tracer le segment [MM_2]
- Comparer avec le compas les distances [OM_1] et [OM_2]
- Qu’est ce qu’on constate ?

La composée de deux symétries orthogonales d’axe (D) et (D’) perpendiculaires est une symétrie centrale de centre O où O est l’intersection des deux droites

4.2.3 Composée de deux translations

La composée de deux translations de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$