Suites numériques réelles : limite et convergence

Exercice 1

Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

1) a) $u_n = 2n+3$ b) $u_n = -\frac{2}{3}n+7$ c) $u_n = \frac{3n+5}{7}$ d) $u_n = -3+\frac{1}{2}n$

2) a) $u_n = 2+\frac{3}{n}$ b) $u_n = \frac{2n+3}{n}$ c) $u_n = \frac{3n-5}{n+2}$ d) $u_n = \frac{-2n+3}{3n+1}$

3) a) $u_n = \frac{2}{n^2}$ b) $u_n = \frac{n^2+1}{n+2}$ c) $u_n = \frac{2n^2-3}{n^2-n+1}$ d) $u_n = \frac{n^2+5n-1}{3n^2-n+2}$

4) a) $u_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ b) $u_n = -\left(\frac{3}{7}\right)^n$ c) $u_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n$ d) $u_n = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n$

5) a) $u_n = \frac{2}{5}.3^n$ b) $u_n = -2.5^n$ c) $u_n = 6\left(\frac{7}{5}\right)^n$ d) $u_n = (-3)^n$

Exercice 2

Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = 2+\frac{1}{3^n}$ b) $u_n = \frac{2^n}{5^{n+1}}$ c) $u_n = \frac{3^{n-2}}{2^n}$ d) $u_n = \frac{2^{n-2}}{3^n}$

a) $u_n = \frac{1-3^n}{2}$ b) $u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{5}$ c) $u_n = \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{3}\right)^n}$ d) $u_n = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^n+2}{5\left(\frac{1}{3}\right)^n-5}$

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On pose $v_n = u_n - 2$.

1°) Calculer u_1, v_0 et v_1.

2°) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q

3°) a) Expliciter v_n et calculer sa limite.

b) Expliciter u_n et calculer sa limite.

4°) a) Exprimer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

b) En déduire l'expression de $S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4-u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1°) Calculer u_1 et u_2

2°) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique dont on déterminera sa raison et son premier terme.

3°) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

4°) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ et la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

Exercice 4

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} \end{cases}$ pour tout $n \in IN$

1°) Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n)

2°) On considère la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{u_n + 3}{u_n - 4}$ pour tout $n \in IN$

a) Calculer v_0, v_1 et v_2

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?

c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

d) Calculer $v_{n+1} - v_n$. En déduire le sens de variation de la suite (v_n)

3°) Calculer les limites de (u_n) et (v_n)

4°) Calculer $S_n = v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n