Suites numériques réelles : Limite et convergence

1. Définitions

On dit que (u_n) admet *l* pour limite si lorsque n prend les valeurs de plus en plus grandes, les termes u_n finissent par s'accumuler autour de *l*.

Notation : $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ ou $\lim u_n = l$

Si on pose $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto u(x)$ où u est la fonction telle que $u(n) = u_n$ pour tout entier n, on peut écrire :

$\lim_{n\to\infty} u_n = l$ si et seulement si $\lim_{x\to+\infty} u(x) = l$

On dit dans ce cas que (u_n) est convergente et qu'elle converge vers l.

Une suite non convergente est dite divergente.

(u_n) est divergente si elle a pour limite $+\infty$ *ou* $-\infty$, ou si elle n'a pas de limite

2. Suites de référence

2.1 Suite constante

Soit $u_n = k$ quel que soit n. Alors $\lim(u_n) = k$

2.2 Suite du type $u_n = n^\alpha$

Si $\alpha > 0$, $\lim(u_n) = +\infty$

Si $\alpha < 0$, $\lim(u_n) = 0$

2.3 Suites arithmétiques

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.

Alors $u_n = u_0 + n.r$.

- si r > 0, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$
- si r < 0, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = -\infty$
- si r = 0, alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = u_0$

2.4 Suites géométriques

Théorème :

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = q^n$

- si $q > 1$ $\lim_{n\to+\infty}(u_n) = +\infty$
- si $q = 1$, (u_n) est stationnaire et converge vers 1

- si $0<|q|<1$, $\lim(u_n)=0$

- si $q\leq -1$, (u_n) n'a pas de limite

Exemples

1) *Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$ et de premier terme 5. Calculer la limite de (u_n) .*

Réponse

(u_n) est la suite géométrique de raison $q=\frac{2}{3}$ et de premier terme 5, donc le terme général de cette suite est $u_n=5\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$|q|=\frac{2}{3}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=0$

2) *Soit (u_n) la suite géométrique de raison $q=\frac{5}{2}$ et de premier terme -3. Calculer la limite de (u_n) .*

Réponse

(u_n) est la suite géométrique de raison $q=\frac{5}{2}$ et de premier terme -3, donc le terme général de cette suite est $u_n=-3\left(\frac{5}{2}\right)^n$.

$|q|=\frac{5}{2}>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n=+\infty$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)=-\infty$

Remarque

Considérons la suite (S_n) définie par $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$ où (u_n) est une suite géométrique de raison q et de 1[er] terme u_0.

On sait que si $q\neq 1$, $S_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On a : si $|q|<1$, $\lim q^{n+1}=0$ donc, (S_n) converge et $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n)=\frac{u_0}{1-q}$