Etude de quelques fonctions : fonctions polynômes

1. Plan d'étude

Pour l'étude d'une fonction on cva adopter le plan suivant

1. Détermination du domaine de définition
2. Etude de la parité pour réduire éventuellement le domaine d'étude De :
   Si f est paire ou impaire, on peut (mais ce n'est pas obligatoire) réduire l'étude sur $D_e = [0;+\infty[\cap D_f$, puis compléter la courbe par symétrie (par rapport à l'origine O si f est impaire, et par rapport à l'axe des ordonnées si f est paire). Si f n'est ni paire ni impaire, on doit faire l'étude sur D_f tout entier
3. Calcul des limites aux bornes de D_f ou D_e. Etude des branches infinies (que l'on verra avec les fonctions rationnelles)
4. Calcul de f '(x)
5. Etude du signe de f '(x)
6. Tableau de variation de f.
7. Etude de quelques points particuliers : points en lesquels on a des tangentes horizontales…(points en lesquels la dérivée s'annule), tableau de valeurs
8. Construction de la courbe

2. Fonctions polynômes

1[er] <u>exemple :</u> $f(x) = x^2 - 2x - 1$

- f est une fonction polynôme donc $D_f = R =]-\infty;+\infty[$
- Parité : $f(-x) = (-x)^2 - (-2x) - 1 = x^2 + 2x - 1$

$f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$ donc f n'est ni paire ni impaire, et on doit faire l'étude sur $D_f =]-\infty;+\infty[$

- *limites aux bornes de D_f*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^2 - 2x - 1) = \lim_{x\to-\infty} x^2(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to-\infty} x^2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x^2 - 2x - 1) = \lim_{x\to+\infty} x^2(1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}) = \lim_{x\to+\infty} x^2$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

- *Dérivée*

$$f'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1)$$

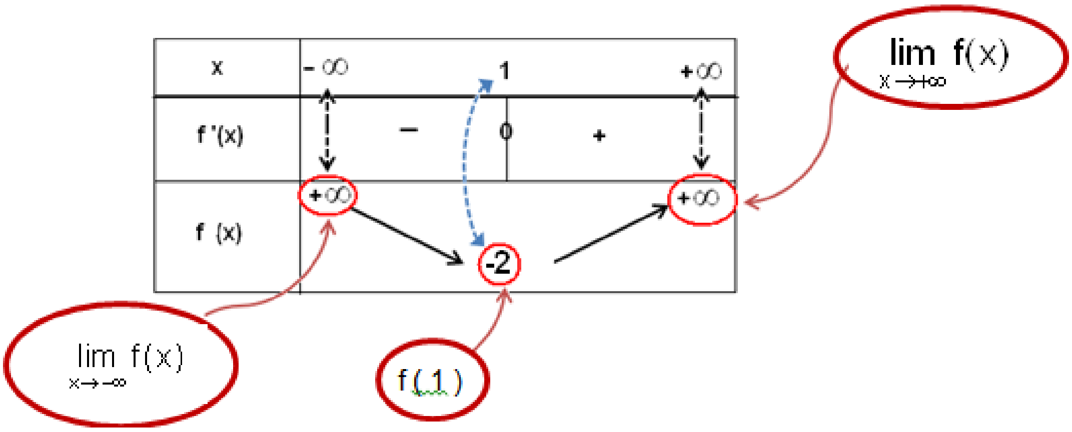
Signe de f '(x)

f '(x)= 0 si et seulement si x-1=0, donc si et seulement si x = 1

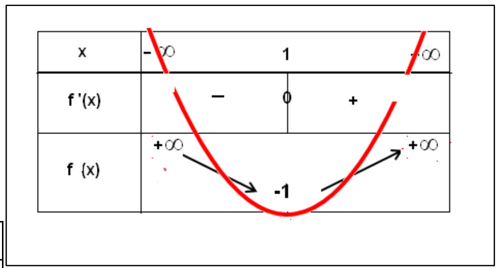
On a une tangente horizontale en (1 ; f(1))

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x-1		−	0	+	
f '(x)		−	0	+	

- *Tableau de variation :*



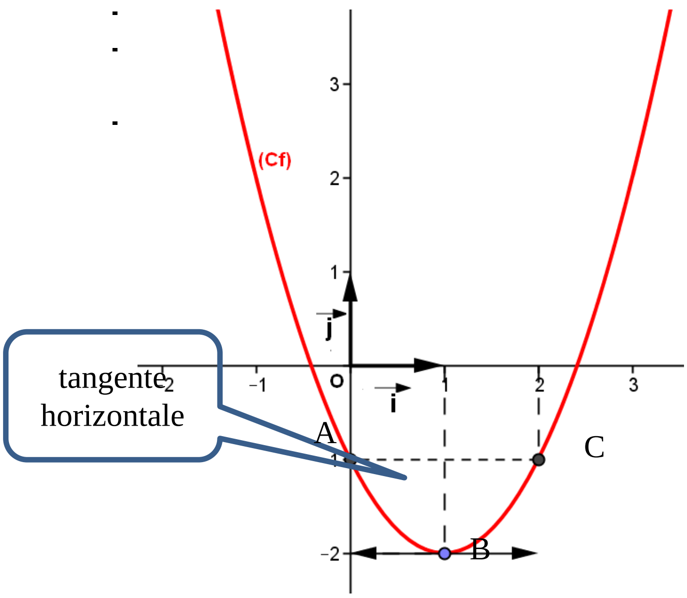
Le tableau de variation nous donne l'allure générale de la courbe



x	0	1	2
f(x)	-1	-2	-1

C(2,-1)
B(1 ;-2)
A(0 ;-1)

Courbe



2ème exemple $f(x) = x^2$

- $D_f = R =]-\infty;+\infty[$
- $Parité: f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

  f est paire $D_e = [0;+\infty[$
- *limites aux bornes du domaine d'étude D_e*

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- *Dérivée*

  $f'(x) = 2x$

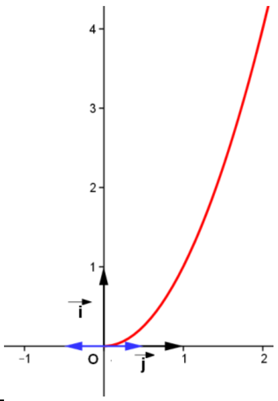
- *Tableau de variation :*

x	0		$+\infty$
f '(x)	0	+	
f(x)	0	$\nearrow$	$+\infty$

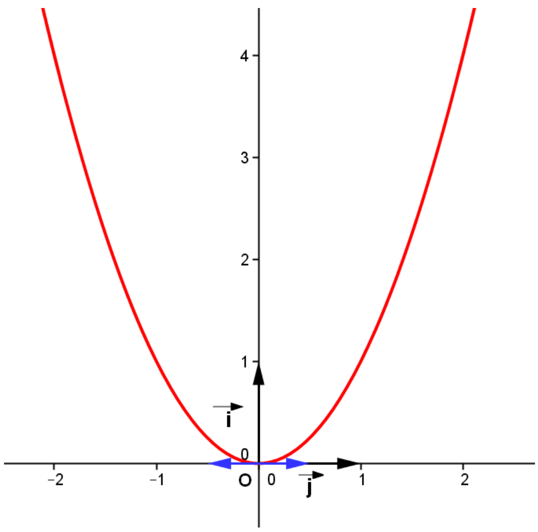
$f'(0) = 0$, donc on a une tangente horizontale en (0,f(0))

x	1	2
y	1	4

On obtient d'abord la courbe sur $D_e = [0;+\infty[$



Puis, en complétant par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, on obtient la courbe complète



- $D_f = \mathbb{R} =]-\infty;+\infty[$

- *Parité* :
  f n'est ni paire ni impaire
- *Limites :*
  $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$
  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} -x^2 = -\infty$
- Dérivée
  $f(x) = -4x + 4$

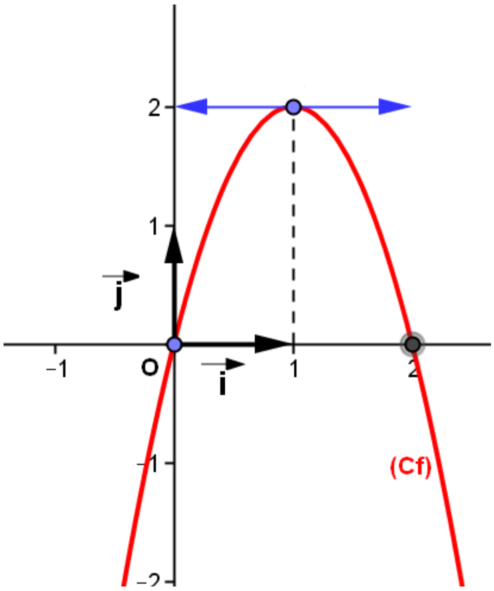
- *Tableau de variation* :
  f'(x)= 0 si et seulement si x=1
  $f(1) = -2(1)^2 + 4(1) = 2$

Donc on a une tangente horizontale au point de coordonnées (1 ;2)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

-2	-1	1	2
3	0	2	0

Courbe :



4e exemple : $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

Recopier et compléter :

- $D_f =$
- *Parité* :

  $f(-x) =$

  $-f(x) =$

  Donc f

- *Limites :*

  $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$

  $f'(x) =$

- *Etude du signe de f '(x)*

  $f'(x) = 0$ si et seulement si x =… ou x =…..

  $f(x) = -(x - ...)(x + ...)$

f '(..) = 0 et f '(..)= 0, donc on a deux tangentes horizontales en … et en ....

Tableau de signe

x	$-\infty$		$+\infty$
-1			
x-		0	
x+	0		
f '(x)	0	0	

- *Tableau de variation*

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$				

- *Tableau de valeur*

x	-2	-1	0	1	2
f(x)					

- *Courbe*