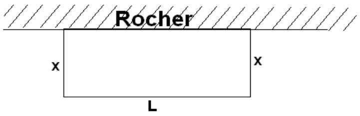
CORRIGÉS DES EXERCICES

Exercice 1



La longueur du grillage est de 60 m.

On a donc L+2x = 60, ce qui donne L = 60 -2x

1. La surface S d'un rectangle de longueur L et de largeur l est S = L.l.
   Comme la largeur du jardin est x, on a S(x) = (60-2x)x=60x-2x^2.
2. S'(x) = 60-4x

   60-4x= 0 si et seulement si $\mathbf{x} = \frac{60}{4} = 15$

x	0	15	30
60 - 4x	+	0	−

D'après le tableau de variation de S, on a un maximum en x = 15, et la valeur maximale de S est S(15) = 60 .15-2.(15)^2 = 450

x	0	15	30
S'(x)	+	0	−
S(x)	↗		↘

Ainsi pour avoir une surface maximale, la longueur L du jardin doit être de 30 m, et la largeur x= 15m.

La surface maximale que l'on peut avoir avec ce grillage est S = 450m^2

Exercice 2

Une entreprise fabrique un certain produit.

Le coût total de fabrication de q tonnes de produits est $\mathbf{C(q)} = \mathbf{q}^3 - 14\mathbf{q}^2 + 82\mathbf{q} + 100$ avec $0 \leq \mathbf{q} \leq 15$. Le coût est exprimé en milliers d'Ariary.

1.- Le coût de fabrication de 1o tonnes de produits est $\mathbf{C}(10) = 10^3 - 14(10)^2 + 82(10) + 100$

C(10)= 520 donc le coût de fabrication de 10 tonnes de produits est 520 milles ariary.

2.- L'entreprise vend la totalité de sa production à 50 000 Ariary la tonne.

a) Le bénéfice obtenu pour q tonnes de produits vendus est

B(x) = Prix de vente – coût de production

Le prix de vente de q tonnes de produits est 50.q

Donc $\mathbf{B(q)} = 50\mathbf{q} - \mathbf{q}^3 + 14\mathbf{q}^2 - 82\mathbf{q} + 100$

d'où $\mathbf{B(q)} = -\mathbf{q}^3 + 14\mathbf{q}^2 - 32\mathbf{q} - 100$.

b) On pose $\mathbf{B(x)} = -\mathbf{x}^3 + 14\mathbf{x}^2 - 32\mathbf{x} - 100$.

$\mathbf{B'(x)} = -3\mathbf{x}^2 + 28\mathbf{x} - 32$

$\Delta = 28^2 - 4(-3)(-32) = 400$

$\mathbf{x'} = \frac{-28-20}{2(-3)} = 8$, $\mathbf{x''} = \frac{-28+20}{2(-3)} = \frac{4}{3}$

x	0		$\frac{4}{3}$		8		15
$x-8$		$-$		$-$	0	$+$	
$3x-4$		$-$	0	$+$		$+$	
-3		$-$		$-$		$-$	
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

x	0		$\frac{4}{3}$		8		15
$B'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

D'après le tableau de variations de B, on a un maximum local pour q = 8, donc le bénéfice B est maximal lorsque l'entreprise produit 8 tonnes de produit

$$B(8) = -8^3 + 14(8)^2 - 32(8) - 100$$

D'où le bénéfice maximal est B(8)= 28 000 ar

Exercice 3

On rappelle que l'équation de la droite tangente à la courbe de f au point (d'abscisse) x_0 est $y= f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$, $x_0=-1$

f(-1)=0, f '(x)=2x+3, f '(-1)=1, donc l'équation de la tangente en -1 est y = x+1

b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $x_0 = 0$

f(0)=1, $f'(x) = 3x^2 - 6x$ f '(0)=0, donc l'équation de la tangente en 0 est y= 1 (c'est une droite horizontale)

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$, $x_0= 1$

$$f(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} \quad f'(1) = -\frac{1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}$$

Donc l'équation de la tangente en 1 est $y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par Exercice $f(x) = x^2 - x - 2$

1. Domaine de définition D de f

   f étant une fonction polynôme, $\mathbf{D_f} = \left]-\infty;+\infty\right[$

2. Étude la parité de f

   $\mathbf{f(-x)} = \mathbf{(-x)}^2 - \mathbf{(-x)} - 2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - 2$

   Comme $\mathbf{f(-x)} \neq \mathbf{f(x)}$ et $\mathbf{f(-x)} \neq -\mathbf{f(x)}$ f n'est ni paire ni impaire

3. Limites de f aux bornes de D

   $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - x - 2 = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$

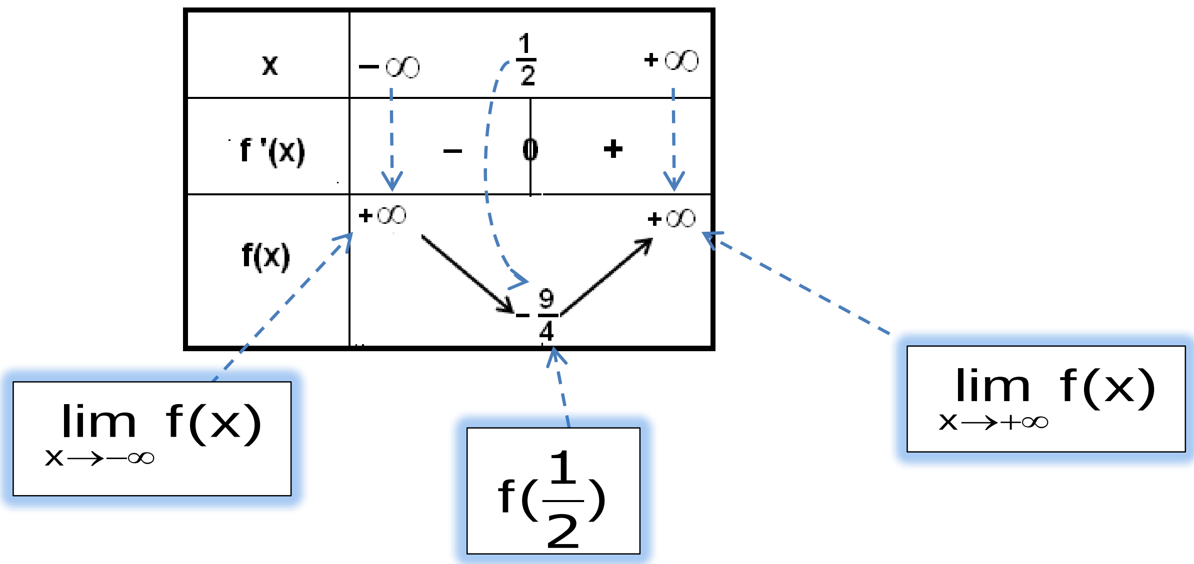
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - x - 2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

4. Dérivée.

   $\mathbf{f'(x)} = 2\mathbf{x} - 1$

5. Tableau de variation de f

   f'(x)= 0 si et seulement si $\mathbf{x} = \frac{1}{2}$



6. On a une tangente horizontale en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$

$\mathbf{f'(}\frac{1}{2}\mathbf{)} = 0$ donc on a une tangente horizontale en $\mathbf{x} = \frac{1}{2}$

7. Équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0 = -1

   On rappelle que l'équation de la droite tangente à la courbe de f au point (d'abscisse) x_0 est y= f '(x_0)(x-x_0) + f(x_0)

   $\mathbf{f(x)} = \mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 2$ $\mathbf{f(-1)} = \mathbf{(-1)}^2 - \mathbf{(-1)} - 2 = 0$

   $\mathbf{f'(x)} = 2\mathbf{x} - 1$ $\mathbf{f'(-1)} = 2\mathbf{(-1)} - 1 = -3$

   Donc l'équation de la tangente en -1 est y= -3(x-(-1))+0

   ou y = -3x-3