Systèmes de numération

1. Introduction

Considérons le nombre 2315.

On peut écrire 2315 = 2. 1000 + 3.100 +1.10 + 5

ou $2315=2.10^3+3.10^2+1.10^1+5$

De manière générale, tout nombre entier x peut s'écrire de manière unique sous la forme $x=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+...+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10^1+a_0\cdot 10^0$.

a_0 est le chiffre de l'unité, a_1 le chiffre des dizaines, a_2 le chiffre des centaines ….

On dit l'écriture de x dans le système décimal (de base 10) est $x=(\overline{a_n a_{n-1} .... a_2 a_1 a_0})_{10}=a_n a_{n-1} .... a_2 a_1 a_0$.

De même, tout entier x peut aussi s'écrire $x=a_n\cdot 2^n+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+...+a_2\cdot 2^2+a_1\cdot 2^1+a_0\cdot 2^0$

Exemple $29=1\cdot 16+1\cdot 8+1\cdot 4+0\cdot 2+1\cdot 1$

$29=1\cdot 2^4+1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0$

On dit de même que 29 s'écrit en système « binaire » (de base 2) $29=(\overline{11101})_2$.

On peut procéder de cette façon avec tout réel positif b, et écrire tout entier x sous la forme

$x=a_n\cdot b^n+a_{n-1}\cdot b^{n-1}+...+a_2\cdot b^2+a_1\cdot b^1+a_0\cdot b^0$, et $x=\overline{(a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0)_b}$

2. Définitions

On appelle système de numération toute manière de représenter tout entier naturel.

On appelle base d'un système de numération le nombre de chiffres (ou de symboles) qu'il utilise.

Ainsi le système de base 10, appelé système décimal, utilise les chiffres de 0 à 9, le système de base 2, appelé système binaire, utilise les chiffres 0 et 1.

Le système à base 12, appelé système duodécimal, utilise les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a et b qui représentent respectivement les nombres zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six sept, huit, neuf, dix et onze .

Le système à base 16, appelé système hexadécimal, utilise les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a, b, c, d, e, et f, qui représentent respectivement les nombres entiers de zéro à quinze.

3. Changement de base

3.1 Passage d'une base b non décimale à la base 10

Exemple :

Soit $x=(\overline{12143})_5$ l'écriture de x dans le système de base 5.

On a $x=1\cdot 5^4+2\cdot 5^3+1\cdot 5^2+4\cdot 5^1+3\cdot 5^0$. En effectuant les calcul, on a

$x=1\cdot 625+2\cdot 125+1\cdot 25+4\cdot 5+3.1$ et x = 923

Ainsi $x=(923)_{10}$

3.2 Passage de la base 10 à une base b non décimale

- On divise x par b : $x = q_0\, b + r_0$ où r_0 est le reste de la division.

- On divise le quotient q_0 par b : $q_0 = q_1 b + r_1$, r_1 est le reste de la division

On a alors : $x = [q_1 b + x_1]b + x_0 = q_1 b^2 + r_1\, b + r_0$.

- On divise le quotient q_1 par b : $q_1 = q_2\, b + x_2$, r_2 : reste de la division

….

On refait l'opération jusqu'à ce que le quotient soit inférieur à b. Soit q_{n-1} le premier quotient inférieur à b.

On pose $x_n = q_{n-1}$ ($0 < r_n < b$).

On a : $x = [\,[[..((r_n\, b + r_{n-1})\, b + r_{n-2})\, b + \ldots\ldots + r_2]\, b + r_1]\, b + r_0$

$$x = r_n\, b^n + r_{n-1} b^{n-1} + r_{n-2} b^{n-2} + \ldots\ldots + r_2 b^2 + r_1 b + r_0.$$

Avec $0 \leqslant r_i < b$ pour i = 0, 1, 2….., n-1 et $0 < r_n < b$.

Exemples :

1) Donner l'écriture de 69 dans le système à base 4.

$55 = 4.13+3$

$13 = 4.3+1$

$55 = 4(4.3+1)+3 = 3.\ 4^2 + 1.4^1 + 3.\ 4^0$

$(55)_{10} = (\overline{313})_4$

2) Donner l'écriture de 106 dans le système à base 3.

$$\begin{array}{r|l} 106 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 35 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 35 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 3 \\ \cline{2-2} 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & \end{array}$$

$106 = 35.3+1$ $\qquad 35 = 11.3+2$ $\qquad 11 = 3.3 +2$ $\qquad 3 = 3.1+0$

$106 = 35.3+1 = (11.3+2)3+1 = ((3.3+2)3+2)3+1 = 1.3^4 + 2.3^3 + 2.3^1 + 1.3^0$

$106 = (\overline{1221})_3$