PPCM et PGCD DE DEUX OU PLUSIEURS NOMBRES

1. PGCD de deux nombres

Le PDCD de nombres est le produit **des facteurs communs** aux deux décompositions, chaque facteur étant affecté du **plus petit exposant** apparu dans les deux décompositions

Exemple :

On a : $2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11$

$4200 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$

Alors $\boldsymbol{PGCD(2772; 4200) = 2^2 \times 3 \times 7}$

2. PPCM de deux nombres

Le PPCM de nombres est le produit **de tous les facteurs** des deux décompositions, chaque facteur étant affecté du **plus grand exposant** apparu dans les deux décompositions

Exemple :

On a : $2772 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11$

$4200 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$

Alors $\boldsymbol{PPCM(2772; 4200) = 2^3} \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$

3. PPCM / PGCD de trois ou plusieurs nombres

On applique les mêmes règles pour calculer le PPCM ou PGCD de 3 ou plusieurs nombres

- Le PDCD de trois ou plusieurs nombres est le produit **des facteurs communs** aux décompositions de ces nombres, chaque facteur étant affecté du **plus petit exposant** apparu dans les deux décompositions
- Le PPCM de trois ou plusieurs nombres est le produit **de tous les facteurs** des décompositions de ces nombres, chaque facteur étant affecté du **plus grand exposant** apparu dans les deux décompositions

Exemple :

Soit : $A = 2^5 \times 3^2 \times 7^2 \times 11$
$B = 2^3 \times 3^4 \times 7^3 \times 11 \times 13$

$C = 2^2 \times 3^6 \times 7 \times 5^3 \times 11$

On a alors :

$$\boldsymbol{PPCM(A;B;C)} = \mathbf{2^5} \times 3^6 \times 5^3 \times 7^3 \times 11 \times 13$$

$$\boldsymbol{PGCD(A;B;C)} = \mathbf{2^2} \times 3^2 \times \mathbf{7} \times \mathbf{11}$$

4. Utilisations

- Pour rendre irréductible une fraction, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD

Exemple :

Rendre irréductible la fraction : $\frac{120}{36}$

On a : $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

$36 = 2^2 \times 3^2$

Et $\boldsymbol{PGCD(120;36)} = \mathbf{2^2 \times 3}$

Alors : $\frac{120}{36} = \frac{2^3 \times 3 \times 5}{2^2 \times 3^2} = \frac{2 \times 2^2 \times 3 \times 5}{2^2 \times 3 \times 3}$

En divisant par $2^2 \times 3$ le numérateur et le dénominateur, on a :

$$\frac{120}{36} = \frac{2 \times 5}{3} = \frac{10}{3}$$

- Pou rendre au même dénominateur deux fractions : le PPCM des deux dénominateurs est un dénominateur commun de deux fractions.

Rendre au même dénominateur les fractions $\frac{17}{12}$ et $\frac{19}{18}$

On a :

$12 = 2^2 \times 3$

$18 = 2 \times 3^2$

Et $\boldsymbol{PGCD}(\mathbf{12}; \mathbf{18}) = \mathbf{2^2} \times 3^2$

Donc

$$\frac{17}{12} = \frac{17}{2^2 \times 3} = \frac{17 \times 3}{2^2 \times 3 \times 3} = \frac{17 \times 3}{2^2 \times 3^2} = \frac{51}{36}$$

$$\frac{19}{18} = \frac{19}{2 \times 3^2} = \frac{19 \times 2}{2 \times 3^2 \times 2} = \frac{57}{36}$$