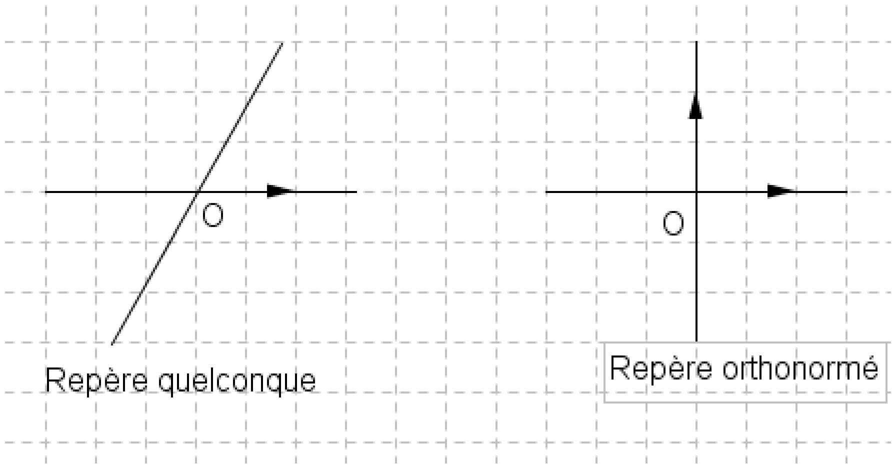
Géométrie analytique

1. Repère

1.1 définition

Un repère est composé d'un point qui est l'origine ,et de deux vecteurs non colinéaires . Les longueurs des vecteurs indiquent les unités du repère



1.2 Coordonnées d'un point dans un repère

1.2.1 Définition

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et M un point du plan. On peut écrire $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et cette écriture est unique. Le couple (x ; y) est appelé coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note M(x ; y).

x est appelé abscisse de M et y l'ordonné de M

Exemples

A(2 ; 3) se lit le point A a pour coordonnées 2 et 3 . 2 est l'abscisse de A et 3 est l'ordonnée de A.

B(-3 ; 2) se lit le point B a pour coordonnées -3 et 2 . -3 est l'abscisse de B et 2 est l'ordonnée de B.

1.2.2 Construction et lecture

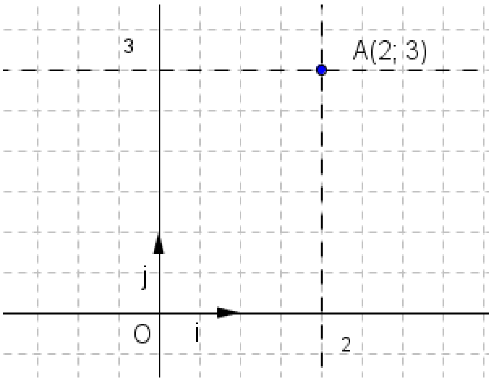
Pour placer le point M(x ; y),

- on lit sur la graduation de l'axe $(O, \vec{i})$ la valeur de x .
- On trace à cet endroit une droite (d_1) perpendiculaire à $(O, \vec{i})$
- on lit sur la graduation de l'axe $(O, \vec{j})$ la valeur de y .
- On trace à cet endroit une droite (d_2) perpendiculaire à $(O, \vec{j})$

Le point M est l'intersection de ces deux droites

Exemple

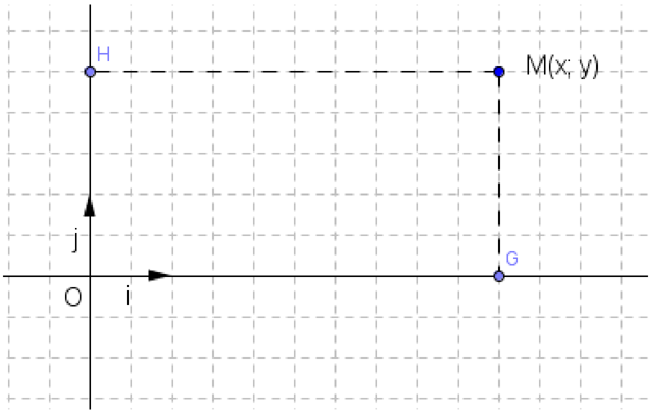
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, placer les points A(2 ; 3) et B(-3 ; 2)



Pour lire les coordonnées de M(x ; y) :

x et la projection orthogonale de M sur l'axe (O, $\vec{i}$)

y est la projection orthogonale de M sur l'axe (O, $\vec{j}$)



1.2.3 coordonnées du milieu d'un segment

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on donne les points A(x_A : y_A), B(x_B : y_B), I(x_I ; y_I).

I est le milieu du segment [AB], si et seulement si, $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé calculer les coordonnées du milieu I des points A(2 ; 3) et B(-4 ; 1)

$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + (-4)}{2}$ = -1 et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+1}{2}$ = 2. Donc I(-1 ; 2)

1.2.4 Calcul de la distance de deux points

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan, on donne les points A (x_A : y_A), B(x_B : y_B) .

la distance AB est:

AB = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

2. Composantes d'un vecteur

2.1 Définition

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan et M (x ; y) un point . Si on pose $\vec{u}$ = $\overrightarrow{OM}$,

Dans l'écriture $\overrightarrow{OM}$ = $x\vec{i}$ + $y\vec{j}$, x et y sont les composantes du vecteur $\vec{u}$ et on écrit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Si on donne les points A (x_A : y_A), B(x_B : y_B) . Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont ($x_B - x_A$) et ($y_B - y_A$).

On écrit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,on donne A(2 ; 3) et B(-4 ; 1) . Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$

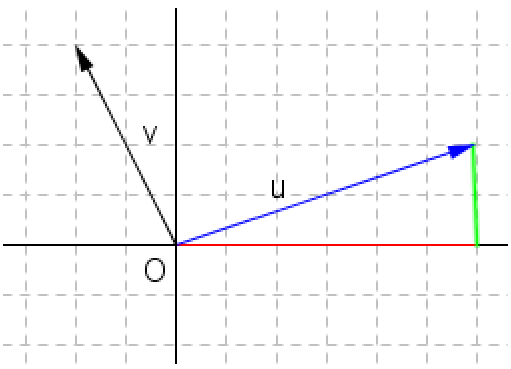
($x_B - x_A$) = – 4 – 2 = – 6 et ($y_B - y_A$) = 1 – 3 = – 2 alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$

2.2 Construction

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$. A partir de O ,on avance ou on recule de x unités suivant l'axe $(O,\vec{i})$ selon que x est positif ou négatif, puis on monte ou on descend de y unités suivant l'axe $(O,\vec{j})$ on obtient un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le vecteur $\vec{u}$

Exemple

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$



2.3 Norme d'un vecteur

La norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ est sa longueur qui est la distance AB, et d'après la définition de la distance, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, la norme de $\vec{u}$ notée $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exemple

$\vec{u}\binom{1}{-1}$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

2.4 Composantes de la somme et du produit par un réel

2.4.1 Composantes de la somme de deux vecteurs

Soit A, B, C, D quatre points du plan tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$

si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour composantes $\vec{u}\binom{x_1}{y_1}$ et $\vec{v}\binom{x_2}{y_2}$.

Le vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour composantes $\vec{w}\binom{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$

Exemple

On donne les vecteurs $\vec{u}\binom{1}{1}$, $\vec{v}\binom{1}{-1}$ Calculer les composantes de $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

$x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2$, $y_1 + y_2 = 1 - 1 = 0$,donc $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

2.4.2 Composantes du produit d'un vecteur par un réel

Si le vecteur $\vec{u}$ a pour composantes $\vec{u}\binom{x}{y}$, le vecteur $\vec{w} = k\vec{u}$ a pour composantes $\vec{w}\binom{kx}{ky}$

Exemple

si le vecteur $\vec{u}$ a pour composantes $\vec{u}\binom{1}{1}$, $\vec{w} = -3\vec{u}$ a pour composantes $\vec{w}\binom{-3}{-3}$

2.4.3 Condition de colinéarité de deux vecteurs

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient $\vec{u}\binom{x_1}{y_1}$ et $\vec{v}\binom{x_2}{y_2}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

$\vec{u}$ // $\vec{v}$ équivaut à $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$

Exemple

$\vec{u}\binom{4}{2}$ et $\vec{v}\binom{6}{3}$, on a 4x3 – 2x6 = 0, donc $\vec{u}$ // $\vec{v}$

2.4.4 Condition d'orthogonalité de deux vecteurs

Les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont orthogonaux si xx' + yy' = 0.

Les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ alors, $\vec{u} \perp \vec{v}$ équivaut à xx' + yy' = 0.

3. Droites dans le plan

3.1 Équation cartésienne d'une droite

3.1.1 Droite définie par deux points

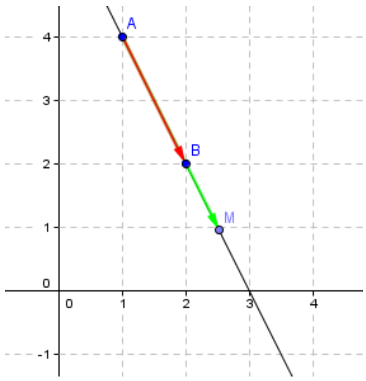
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B) deux points distincts du plan et M(x ; y) un point quelconque de ce plan.

Le point M appartient à la droite (AB) si et seulement si les point A, B, M sont alignés ; si et seulement si les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.

La droite (AB) est l'ensemble des points M du plan tel que A, b, M alignés , c'est-à-dire que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.

(AB) = { M(x ; y) / $\vec{AM}$ // $\vec{AB}$ } .

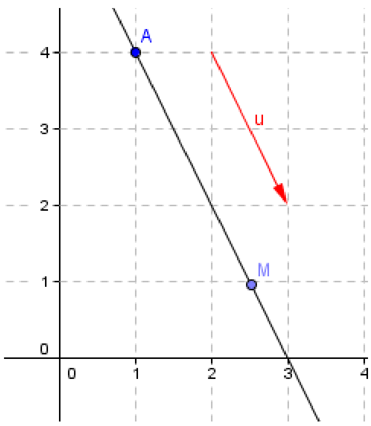
Le vecteur $\vec{AB}$ est appelé vecteur directeur de la droite (AB) .



3.1.2 Droite définie par un point et un vecteur :

Soit A(x_A ; y_A) et $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$ un vecteur non nul de ce plan . La droite (D) passant par A de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tel que $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

(D) = { M(x ; y)/ $\vec{AM}$ // $\vec{u}$ }



3.1.3 Équation cartésienne d'une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (D) une droite de ce plan.

Un point M(x y) appartient à la droite (D) si les coordonnées (x ; y) de M est liées par une relation de la forme ax + by + c = 0 ; où a et b ne sont pas simultanément nuls. Cette relation est appelée équation cartésienne de (D)

Réciproquement :

Soit (E) = { M(x ; y) / ax + by + c = 0 }.

(E) est la droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$ où a et b ne sont pas simultanément nuls.

Exemples :

- 2x -3y+ 4 = 0 est l'équation cartésienne de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{3}{2}$
- -x +4y + 3 = 0 est l'équation cartésienne de la droite de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-4}{-1}$

3.1.4 Détermination de l'équation cartésienne d'une droite

- Soit (D) la droite passant par A (x_A ; y_A) et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$. M(x , y) appartient à cette droite

si les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires . Les composantes de $\vec{AM}$ sont : $\vec{AM}\binom{x-x_A}{y-y_A}$.

On a : β (x – x_A) - α (y – y_A) = 0 et en développant , on obtient l'équation de la forme ax + by + c = 0.

Si la droite passe par deux points A et B, on prend comme vecteur directeur le vecteur $\vec{AB}$.

Exemple :

A(1; 3) et $\vec{u}\binom{3}{2}$, $\vec{AM}\binom{x-1}{y-3}$. On a ainsi, 2(x-1) – 3(y-3) = 0 En développant , on trouve

(D) : 2x-3y +7 = 0

Soit (D) la droite passant par A (x_A ; y_A) et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{\alpha}{\beta}$. L'équation de (D) est de la forme

ax + by + c = 0, avec a = β et b = - α. De plus, les cordonnées de A vérifient l'équation . Si on remplace alors x et y par x_A et y_A, on obtient c et on a l'équation.

Avec le même exemple, (D) : ax + by +c = 0 avec a = 2 et b =- 3. En remplaçant, on obtient 2x1-3x3 +c = 0
On obtient c = 7, d'où le résultat

3.1.5 Construction

Pour tracer la droite (D) : ax + by + c = 0,

on complète le tableau des valeurs pour avoir deux points de la droite

on place ces deux points

on les joigne par une règle

Exemple

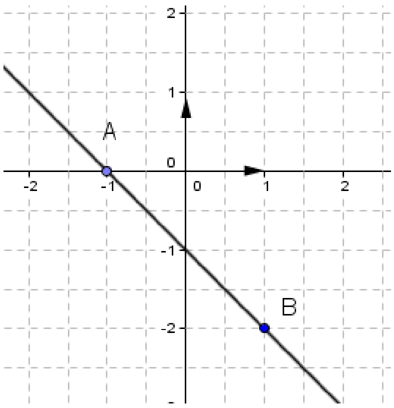
tracer la droite (D) : $x + y + 1 = 0$

Tableau des valeurs :

On donne une valeur à x , puis on calcule y

On redonne une autre valeur à x et on recalcule y

Points	x	y
A	0	– 1
B	1	– 2



Pratiquement

Si (D) : $ax + by + c = 0$, on peut prendre comme tableau des valeurs

Points	x	y
A	0	– c/b
B	–c/a	0

Si (D) : $ax + by = 0$, on peut prendre comme tableau des valeurs

Points	x	y
A	0	0
B	1	–b/a

3.2 Équations réduites

3.2.1 Forme générale

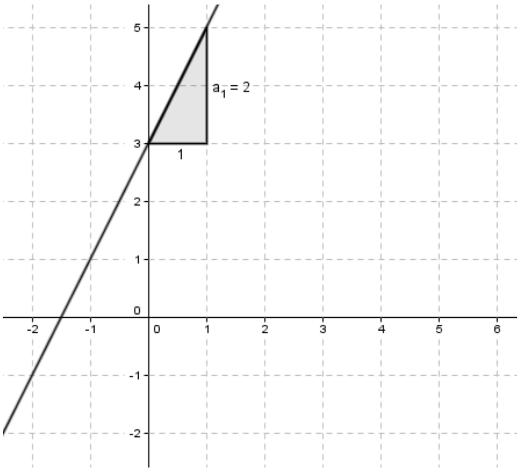
l'équation réduite d'une droite est : $y = ax + b$ ou a est la pente et b l'ordonnée à l'origine

exemple (D) : $y = 2x + 3$

3.2.2 Construction

On peut dresser un tableau de valeur, mais la plus pratique c'est l'utilisation de la pente et de b.

Exemple y= 2x + 3

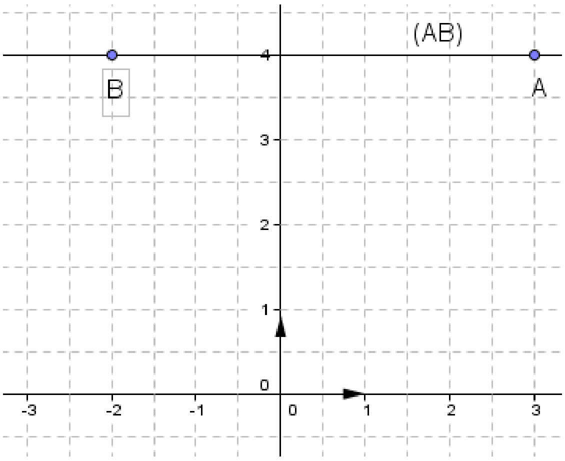


3.3 Droites parallèles aux axes

3.3.1 Droite horizontale

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Si Deux points quelconque de la droite ont même ordonnées, l'équation de la droite est de la forme : y = b.

Par exemple la droite passant par A(3; 4) et B(– 2 ; 4) . (AB) : y = 4



3.3.2 Droite verticale

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Si Deux points quelconque de la droite ont la même abscisse, l'équation de la droite est de la forme : x = a.

Par exemple A(2 ; –1) et B(2 ; 3). L'équation de la droite est x = 2.

4. Positions relatives de deux droites

4.1 Droites parallèles

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient (D) et (D') deux droites définies par leurs équations cartésiennes respectives ax + by + c = 0 et a'x + b'y + c' = 0. les vecteurs directeurs de ces droites sont $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$

(D) et (D') sont parallèles si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ,

(D) // (D') si a'b – ab' = 0.

Si (D) et (D') sont définies par leur équation réduites, y = mx + p et y = m'x +p'.

(D) // (D') si m = m'

Exemple

(D): x – y + 1 = 0 et (D') : 2x – 2y + 3 = 0 sont deux droites parallèles

4.2 Droites perpendiculaires

Équations cartésiennes

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient (D) et (D') deux droites définies par leurs équations cartésiennes respectives ax + by + c = 0 et a'x + b'y + c' = 0. les vecteurs directeurs de ces droites sont $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-b'\\a'\end{pmatrix}$.

(D) et (D') sont perpendiculaires si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

(D) $\perp$ (D') si aa' + bb' = 0

Équations réduites

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soient (D) et (D') deux droites définies par leurs équations réduites y = mx + p et y = m'x +p'.

(D) $\perp$ (D') si mm' = -1

Exemple

(D) : y = 2x + 3 et (D') : y = $\frac{-1}{2}x+2$

4.3 Vecteur normal à une droite

Le vecteur normal à la droite : ax + by + c = 0 est $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$