Corrigé pb Bacc D 2018

Problème

Soit f la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par $f(x)=-x+3+\frac{(-1+\ln x)}{x}$. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1- Soit g la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par $g(x)=x^2-2+\ln x$.

g est une fonction dérivable sur] 0 ; + ∞ [, $g'(x)=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}$.

Quel que soit x de] 0 ; + ∞ [, g'(x) > 0 , donc g est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

b- g est continue et strictement croissante sur] 1,2 ; 1,4 [et g(1,2) = -0,37 < 0 et g(1,4)= 0,29 > 0. donc l'équation g(x) = 0 admet une solution réelle unique α dans] 1,2 ; 1,4 [.

c- g est strictement croissante,

Donc : .si x < α , g(x) < g(α . Comme g(α) = 0, on a g(x) < 0 pour tout x < α

. si x > α , g(x) > g(α . Comme g(α) = 0, on a g(x) > 0 pour tout x < α

2- a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} -x+3+\frac{(-1+\ln x)}{x}$

$\lim_{x\to 0^+}(-1+\ln x)=-\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} x=0^+$, donc $\lim_{x\to 0^+}\frac{(-1+\ln x)}{x}=-\infty$

$\lim_{x\to 0^+} -x+3=3$

Alors $\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$.

Interprétation

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ donc la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale pour la courbe de f.

$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty} -x+3+\frac{(-1+\ln x)}{x}$

$\lim_{x\to \infty}\frac{(-1+\ln x)}{x}=\lim_{x\to\infty}(\frac{-1}{x}+\frac{\ln x}{x})=0$ et $\lim_{x\to +\infty} -x+3=-\infty$

D'où $\lim_{x\to \infty} f(x)=-\infty$.

c- $\lim_{x\to +\infty}(f(x)-(-x+3))=\lim_{x\to +\infty}\frac{(-1+\ln x)}{x}=0$ donc la droite *(D)* d'équation y = -x + 3 est une asymptote oblique à la courbe.

d- Position de $(\mathscr{C})$ par rapport à *(D)*

$f(x)-(-x+3)=\frac{-1+\ln x}{x}$

x	0		e		+
$-1+\ln x$	‖	-	0	+	
x	0	+		+	
$\frac{-1+\ln x}{x}$	‖	-	0	+	

Pour $x\in]0;e[$, f(x) -(- x + 3) < 0, ou f(x) < - x + 3, donc la courbe $\mathscr{C}$ *est* en-dessous de *(D)* sur] 0 ; e [

Pour $x\in]e;+\infty[$, f(x) - (- x + 3) > 0, ou f(x) > - x + 3 , donc la courbe $\mathscr{C}$ *est au*-dessus de *(D)* sur $]e;+\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}$ et la droite (D) des coupent.en x = e

3- a) La fonction f est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et $f'(x)=-1+0+\frac{(\frac{1}{x})x-1.(-1+\ln x)}{x^2}$

$$f'(x)=-1+\frac{1+1-\ln x}{x^2}=\frac{-x^2+2-\ln x}{x^2} .$$

b- On a $g(x)=x^2-2+\ln x$, donc $g(\alpha)=\alpha^2-2+\ln\alpha$. Puisque α est solution de l'équation g(x)= 0, on a g(α) = 0. Alors $\alpha^2-2+\ln\alpha=0$. D'où $\ln\alpha=2-\alpha^2$

On a alors $f(\alpha)=-\alpha+3+\frac{(-1+\ln\alpha)}{\alpha}=-\alpha+3+\frac{(-1+2-\alpha^2)}{\alpha}$

$$f(\alpha)=-\alpha+3+\frac{(1-\alpha^2)}{\alpha}=\frac{-\alpha^2+3\alpha+(1-\alpha^2)}{\alpha}$$

Finalement $f(\alpha)=\frac{-2\alpha^2+3\alpha+1}{\alpha}$

c- $f'(x)=\frac{-x^2+2-\ln x}{x^2}$

Comme $g(x)=x^2-2+\ln x$, on a $f'(x)=\frac{-g(x)}{x^2}$.

D'après le résultat de 1-c- si x < α , g(x) < 0 et si x > α , g(x) > 0, on a

x	0		α		$+\infty$
- g(x)	‖	+		−	
x^2	‖	+	0	+	
f '(x)	‖	+	0	−	

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$

4- a- Détermination du point A de $(\mathscr{C})$ en lequel la tangente (T) et parallèle à (D)

Le coefficient directeur de la tangente (T) en $A(x_0, f(x_0))$ est $f'(x_0)$, et le coefficient directeur de (D) est -1 .

(T) est parallèle à (D) si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux, donc si $f'(x_0) = -1$,

$f'(x)=\dfrac{-x^2+2-\ln x}{x^2}$, donc $f'(x_0) = -1$ si et seulement si $\dfrac{-x_0^2+2-\ln x_0}{x_0^{\ 2}}=-1$

$-x_0^2+2-\ln x_0=-x_0^{\ 2}$ ou $2-\ln x_0=0$

Ce qui donne $\ln x_0=2$

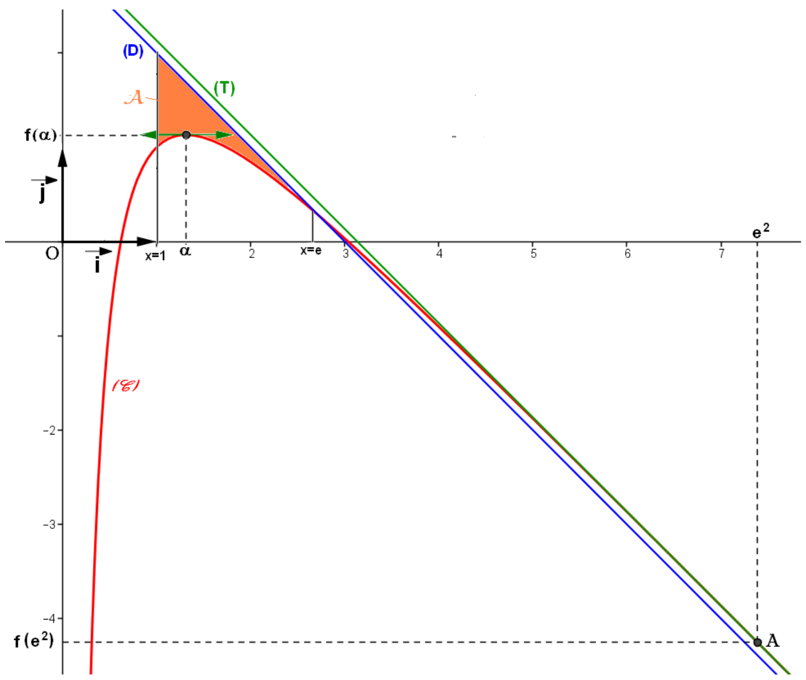
D'où $x_0=e^2$

$$f(e^2)=-e^2+3+\frac{(-1+\ln e^2)}{e^2}=-e^2+3-\frac{1}{e^2}+\frac{2}{e^2}$$

donc $f(e^2)=-e^2+3+\dfrac{1}{e^2}=3-e^2+e^{-2}$

Donc $A(e^2;3-e^2+e^{-2})$.

b- Construction



5- L'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation x = 1 et x = e est donnée, en cm², par

$$A=\int_1^e (f(x)-(-x+3))dx=\int_1^e \frac{-1+\ln x}{x}dx$$

$$A=\int_1^e (\frac{-1}{x}+\frac{\ln x}{x})dx=[-\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}]_1^e=-\ln e+\frac{(\ln e)^2}{2}+\ln 1-\frac{(\ln 1)^2}{2}$$

$$A=\frac{1}{2}$$

Ainsi A = 0,5 x1x1 cm² = 0,5 cm^2