

VECTEURS DU PLAN ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

1. RAPPELS SUR LES VECTEURS

1.1 Bipoints équipollents

Deux bipoints (A, B) et (A', B') sont équipollents si le quadrilatère $ABB'A'$ est un parallélogramme.

Caractérisation : (A, B) et (A', B') sont équipollents si (A, B') et (A', B) ont même milieu.

1.2 Vecteurs

1.2.1 Définitions :

On appelle vecteur \overrightarrow{AB} du plan l'ensemble des bipoints équipollents à (A, B) .

Tout bipoint équipollent à (A, B) est un représentant du vecteur \overrightarrow{AB} .

La direction de \overrightarrow{AB} est la droite (AB) , son sens de A vers B , et sa norme $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) = AB$.

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Si $\|\overrightarrow{AB}\| = d(A, B) = 0$, \overrightarrow{AB} est le vecteur nul et on écrit $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Un vecteur unitaire est un vecteur dont la norme est égale à 1.

Si A, B, C et D ne sont pas alignés, $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

1.2.2 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction.

Théorème :

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

Théorème

Soit \vec{u} un vecteur donné.

Pour tout point A , il existe un point unique M tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

1.3 Produit scalaire

1.3.1 Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$. (forme géométrique)

Et dans un repère orthonormé, si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot x' + y \cdot y'$ (Forme analytique)

1.3.2 Propriétés

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (On dit que le produit scalaire est commutatif)
- $\vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$.
- $(k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux.

1.3.3 Applications :

a) Projection orthogonale

Soit A un point du plan, et (D) une droite.

La projection de A sur (D) est le point A' de (D) tel que (AA') soit orthogonale à (D).

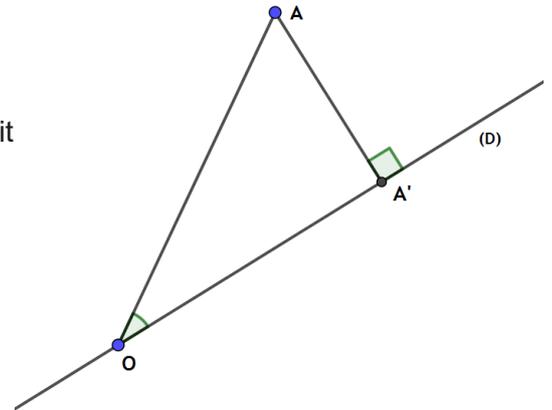
C'est le point de D le plus proche de A.

La distance de A à (D) est $d(A, A')$.

Si on considère le triangle OA'A qui est triangle en A', on a :

$$\cos(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA}) = \frac{OA'}{OA}$$

$$D'où \quad OA' = OA \cos(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OA})$$



b) Relation entre les côtés d'un triangle quelconque

ABC est un triangle quelconque, AB = c, BC = a et AC = b

D'après la relation de Chasles : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\text{Donc } \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

Comme $\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) = \cos \hat{A}$

$$\text{On a : } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Remarques :

- Lorsque le triangle est rectangle en A : $\cos A = 0$, on retrouve le théorème de Pythagore

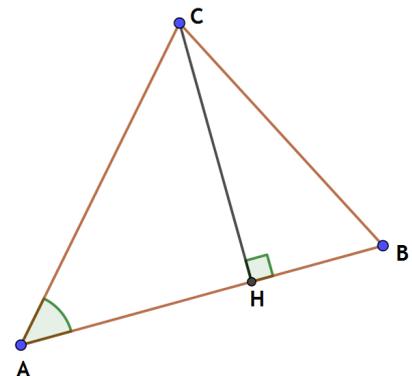
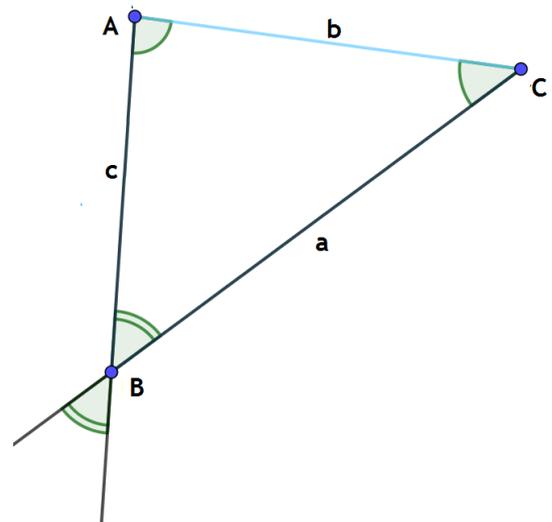
De même, on a, pour les deux autres côtés,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B} \quad \text{et} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

- L'aire d'un triangle ABC est égale à $S = \frac{1}{2} AB \cdot HC$ où H est la projection de C sur la droite (AB).

$$\text{Donc } S = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \hat{A}$$

$$\text{De même, } S = \frac{1}{2} ac \cdot \sin \hat{B} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \hat{C}$$



D'où $2S = ac \cdot \sin \hat{B} = ab \cdot \sin \hat{C} = bc \cdot \sin \hat{A}$.

En divisant par abc , on a : $\frac{2S}{abc} = \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$,

et en passant à l'inverse, $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$

c) Équation d'une droite

Étant donné un point $A(x_0, y_0)$.

Un point $M(x, y)$ appartient à la droite D passant par A et dont un vecteur normal est $\vec{u}(a; b)$ si et seulement si \vec{AM} et \vec{u} sont orthogonaux, donc si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$.

Cette égalité donne l'équation cartésienne de la droite D .

Exemple :

Donner l'équation de la droite D passant par la point $A(1; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Un point $M(x; y)$ appartient à D si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$, donc si et seulement si $(x-1) \cdot 1 + (y-0) \cdot 2 = 0$

Ce qui donne l'équation de la droite : $x + 2y - 1 = 0$.

d) Équation d'un cercle :

Cercle de centre donné

Un point $M(x; y)$ appartient au cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon R si $AM = R$

Comme $AM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, on a l'équation cartésienne du cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon R :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Cercle de diamètre donné

Considérons un cercle de diamètre $[AB]$.

Si M est un point de ce cercle distinct de A

et de B , alors les vecteurs \vec{AM} et \vec{BM} sont

orthogonaux. Donc $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$.

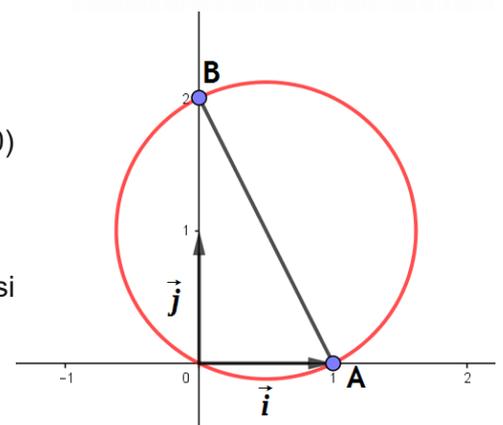
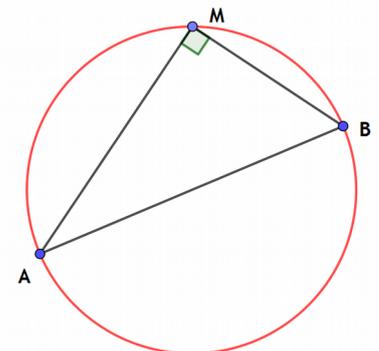
Cette égalité donne une équation cartésienne

du cercle de diamètre $[AB]$.

Exemple :

Donner une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(1; 0)$ et $B(0; 2)$.

Un point $M(x; y)$ appartient à ce cercle si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$



Comme les coordonnées des vecteur \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BM} sont respectivement $(x-1 ; y)$ et $(x ; y-2)$, cette égalité s'écrit $(x-1).x+y.(y-2) = 0$.

Ce qui donne, en développant : $x^2+y^2-x-2y=0$: c'est l'équation du cercle.

- Le centre de ce cercle est le point $I \left(\frac{1}{2} ; 1 \right)$ et son rayon est $r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

On peut retrouver l'équation en utilisant la première méthode :

Un point $M(x ; y)$ appartient à ce cercle si $AM = r$; donc si $\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ou $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 1)^2 = \frac{5}{4}$

e) Distance d'un point à une droite d'équation donnée

On considère une droite d d'équation $ax + by + c = 0$ et un point $M_0(x_0 ; y_0)$ n'appartenant pas à d .

Notons H le projeté orthogonal de M_0 sur d .

La distance de M_0 à d est la distance de M_0 à H

Le vecteur $\vec{u}(a ; b)$ est normal à d .

Le point M_1 défini par $\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{u}$ est tel

que $M_0M_1 = \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Si x_H et y_H sont les coordonnées de H ,

on a, puisque H appartient à d , $ax_H + by_H = c$.

D'une part, $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\overrightarrow{M_0H}$ ont respectivement comme coordonnées $(a;b)$ et $(x_H - x_0; y_H - y_0)$

Donc $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H} = a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0)$,

Ou $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H} = -(ax_0 + by_0 + c)$.

D'autre part $\overrightarrow{M_0M_1} \cdot \overrightarrow{M_0H} = M_0M_1 \cdot M_0H \cdot \cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H})$

D'où $M_0M_1 \cdot M_0H \cdot \cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H}) = -(ax_0 + by_0 + c)$

$$M_0H = \frac{-(ax_0 + by_0 + c)}{M_0M_1 \cdot \cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H})}$$

Ainsi la distance de M_0 à d est $M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0H})}$

