Dénombrement

1. Arrangement

1.1 Définition

Soit E un ensemble ayant n éléments et $p \leq n$.

Un arrangement de p éléments de E est une suite ordonnée de p éléments de E, deux à deux distincts.

Exemples :

- $E=\{a,b,c,d\}$

  $(a,b,c),(a,c,d),(d,b,a)$ sont des arrangements de 3 éléments de E

  (a,b,a) n'est pas un arrangement d'éléments de E

- $E=\{1,2\cdots 6\}$

Un nombre de 3 chiffres différentiels écrit avec les éléments de E est un arrangement de 3 éléments de E.

- Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10

  On tire successivement et sans remise 3 jetons de l'urne.

  Le résultat peut se représenter par un triplet (x_1,x_2,x_3) ou x_1 désigne le numéro du 1er jeton, x_2 désigne le numéro de 2^e jeton, x_3 désigne le numéro du 3^e jeton

  Comme le triage est sans remise ; x_1, x_2, x_3 sont tous différents

  On peut donc assimiler le résultat des triages à un arrangement de 3 éléments pris parmi les 10.

Remarque

Deux arrangements distincts diffèrent soit par la nature soit par l'ordre des éléments :

$$(a,b,c)\neq(a,c,b)$$
$$(a,b,c)\neq(a,c,d)$$

1.2 Nombre d'arrangements

Considérons un ensemble E ayant n éléments et soit $p\leq n$. On veut dénombrer tous les arrangements de p éléments de E.

- Pour le premier élément de l'arrangement, on a n possibilités.
- Avec chacune de ces n possibilités, on peut former (n-1) arrangements en prenant un élément parmi les (n-1) éléments restants. On peut donc au total former n(n-1) arrangements de deux éléments de E.
- Avec chacun des ces n(n-1) possibilités on peut former (n-2) arrangements de 3 éléments en lui associant un élément pris parmi les (n-2) autres ; donc au total, on peut avoir

n(n-1)(n-2) arrangements de 3elements de E.

…………………

Lorsque le (p-1) élément est choisi, on n'a plus que (n-p+1) choix pour le p^e élément pour former les arrangements de p éléments

On a alors $n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)$ arrangements de p éléments de E possibles.

Théorème :

Le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble ayant n éléments est :

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

2. Permutation

E étant un ensemble ayant n éléments. Une permutation des éléments de E est un arrangement de n éléments de E.

Le nombre de permutation des éléments de E est donc :

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Théorème

Le nombre de permutation de n éléments est : $P_n = n!$

3. Combinaison

3.1 Définition

Soit un ensemble ayant n éléments et $p \leq n$; une combinaison de p éléments de E est une partie de E ayant p éléments

Exemple

- $E = \{a, b, c\}$

  $\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}$ sont des combinaisons de 3 éléments de E
- Un sac contient 10 boules.

On extrait simultanément de ce sac 3 boules. On peut assimiler un résultat de cette extraction à une combinaison de 3 éléments.

3.2 Nombre de combinaison

Soit E un ensemble tel que $CardE = n \ avec \ p \leq n$

Posons $E = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ et considérons $A = \{x_1, x_2, \cdots, x_p\} \subset E$

On peut former $p!$ permutations des éléments de A. Mais comme une permutation des éléments de A est un arrangement de p éléments de E. on a $p!$ arrangements des p éléments de E (formés avec les éléments de A)

On a donc $p!$ arrangements avec une combinaison de p éléments de E.

Si C_n^p est le nombre de combinaisons de E, on peut obtenir au total $p! \, C_n^p$ arrangements. Et on obtient tous les arrangements de cette façon.

Or le nombre d'arrangements de p éléments est A_n^p , on a l'égalité : $p! \, C_n^p = A_n^p$

Théorème

Le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments est :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Propriétés

- $C_n^0 = 1$
- $C_n^1 = n$
- $C_n^{n-1} = n$
- $C_n^n = 1$
- $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$

- ***Triangle de Pascal :***

La dernière propriété permet de construire le tableau suivant, appelé Triangle de Pascal

n \ p	0	1	2	3		p	p+1
0	C_0^0						
1	C_1^0	C_1^1					
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
⋮							
n	C_n^0	C_n^1				$C_n^p + C_n^{p+1}$	
n+1	C_{n+1}^0	C_{n+1}^1					C_{n+1}^{p+1}

$$\begin{array}{ccc} \boxed{C_1^0} & + & \boxed{C_1^1} \\ & & \| \\ & & \boxed{C_2^1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \boxed{C_2^1} & + & \boxed{C_2^2} \\ & & \| \\ & & \boxed{C_3^2} \end{array}$$

Ce qui donne :

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5 +	10	10	5	1	
		‖				
1	6	15	20	15	6	1

……..

- **Développement de Newton**

On montre que quels que soient a, b réels, et $n \in N$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^p a^{n-p} b^p + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

ou
$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p$$

Exemples :

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \cdots + C_n^n x^n$$
$$(1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$$

Application : Nombre des parties d'un ensemble

Soit E un ensemble à n éléments

Le nombre de parties à 0 élément est C_n^0

1 élément est C_n^1

2 éléments est C_n^2

…..

p éléments est C_n^p

……

n éléments est C_n^n

Le nombre des parties de E est égal à $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n = cardE$