Applications

1. Définitions et vocabulaires

Soient E et F deux ensembles.

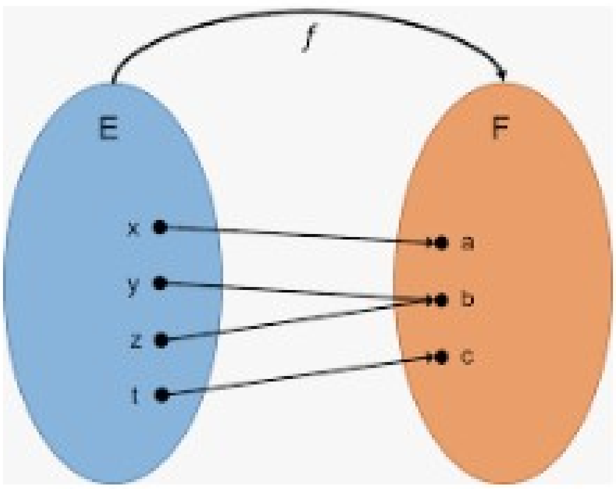
1.1 Définition

Une application f de E dans F est une relation entre les éléments de E et ceux de F telle que chaque élément x de E est en relation avec un et un seul élément y de F.

Si x est en relation avec y par l'application f on écrit $y = f(x)$, on dit que y est l'image de x et x un antécédent de y.

E est l'ensemble de départ (ou source), F l'ensemble d'arrivée de f (ou but).

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$



1.2 Graphe

L'ensemble des couples $(x;f(x))$ $x \in E$ est appelé graphe de f

Le graphe de f est donc :

$$G_f = \{(x, f(x)), x \in E\} = \{(x, y),\ x \in E, y \in F, y = f(x)\}$$

1.3 Image directe image réciproque

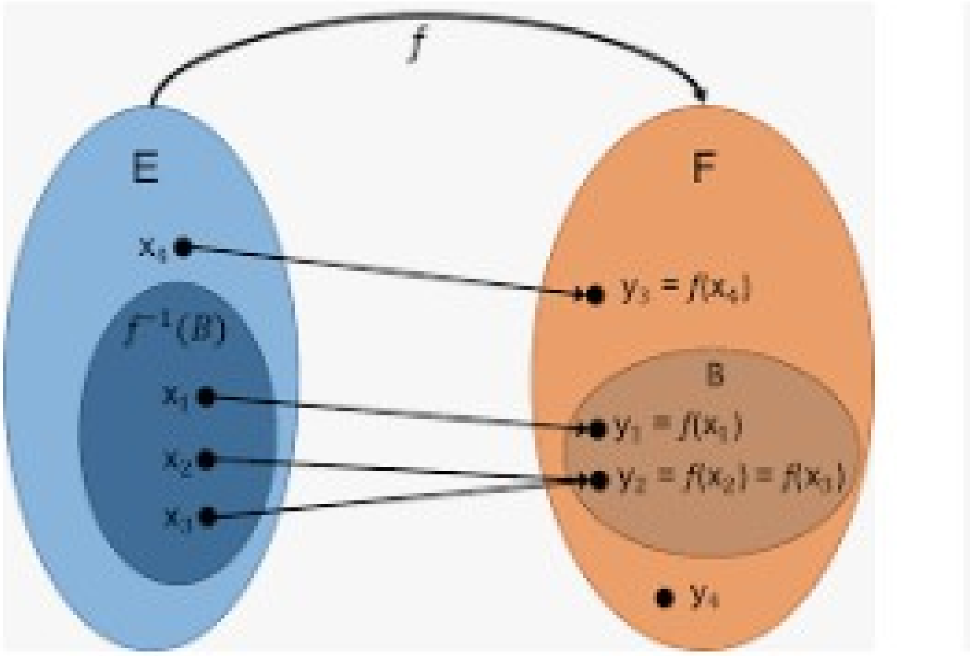
Soit $f : E \to F$, A une partie de E et B une partie de F

On appelle image directe de A et on note $f(A)$ l'ensemble des images des éléments de A.

0n appelle image réciproque de B et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des antécédents des éléments de B.

$$f(A) = \{f(x) / x \in A\} = \{y \in F / \text{ il existe } x \in A,\ y = f(x)\}$$
$$y \in f(A) \ \text{ si et seulement si } (\text{il existe } x \in A,\ y = f(x))$$

$f^{-1}(B) = \{ \ x \in E \ / \ f(x) \in B \ \}$



1.4 Égalité

Deux applications f et g sont dites égales si et seulement si elles ont même ensemble de départ, même ensemble d'arrivée et même graphe. (C'est-à-dire quel que soit x de l'ensemble de départ, $f(x) = g(x)$).

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$

On note gof l'application de E dans G définie par $gof(x) = g[f(x)]$ pour tout x de E

Exemples :

- E = {ensemble de tous les humains}

$f : E \to E$

$x \mapsto f(x) =$ mère de x

$g : E \to E$

$x \mapsto g(x) =$ père de x

$gof(x) = g[f(x)]$ = père de la mère de x = grand-père maternel de x

$fog(x) = f[g(x)]$ = mère du père de x = grand-mère paternelle de x

$f : R \to R$

$x \mapsto x+1$

$g : R \to R$

$x \mapsto x^2$

$fog(x) = f[g(x)] = g(x) + 1 = x^2+1$

$gof(x) = g[f(x)] = [f(x)]^2 = (x+1)^2$

- $f : R_+ \to R_+$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$g : R_+ \to R_+$$

$$x \mapsto \sqrt{x} + 1$$

$$fog(x) = f[g(x)] = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$gof(x) = g[f(x)] = \sqrt{\frac{1}{x}} + 1$$

Propriétés :

- $(fog)oh = fo(goh)$
- $fog \neq gof$ en général
- Si f et g sont injectives, alors fog est injective
- Si f et g sont surjectives, alors fog est surjective
- Si f et g sont bijectives, alors fog est bijective

$f(c) = 1$ donc $f^{-1}(1) = c$

$f(d) = 3$ donc $f^{-1}(3) = d$

Propriétés

- $fof^{1} = id_F$; $f^{1}of = id_E$

id_E = identité de E = application identique

$$id_E : E \to E$$

$$x \mapsto id_E(x) = x$$

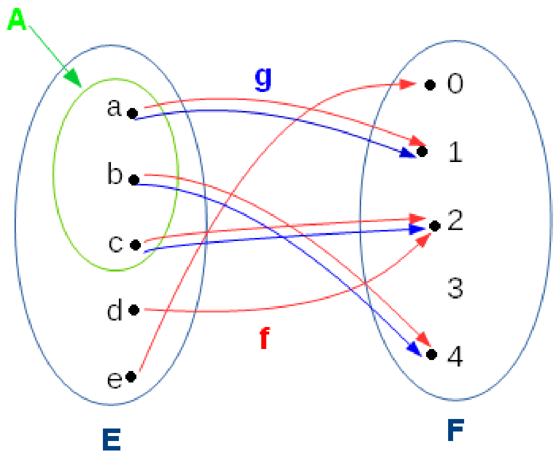
- $(fog)^{1} = g^{1}of^{1}$

- Si $fof = id_E$, c'est-à-dire $f^{-1} = f$, on dit que f est involutive ou que f est une involution

2. Restriction – Prolongement

$f : E \to F$, $A \subset E$

La restriction de f à A est l'application $g : A \to F$ telle que, quel que soit $x \in A$, $g(x) = f(x)$



f est représentée par les flèches rouges, g par les flèches bleues.

L'ensemble de départ de f est E, celui de g est A

On dit que f est un prolongement de g