

## Applications : série 2

### Exercice 1

On considère la relation  $f$  de  $E$  dans  $F$  définie par  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$

1. Si  $E = F = \mathbb{R}$ ,  $f$  est-elle une application ? Justifier votre réponse.
2. On prend  $E = \mathbb{R} - \{2\}$  et  $F = \mathbb{R} - \{2\}$ 
  - a) Montrer que  $f$  est bijective.
  - b) Déterminer la réciproque  $f^{-1}$  de  $f$ .
  - c) Déterminer l'application  $f \circ f$ .

### Exercice 2

On considère l'application  $f$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  définie par  $f((x, y)) = (mx + y, x - my)$  où  $m$  est un nombre réel.

- a) Calculer les images de  $(0,0)$ ,  $(1,-1)$ ,  $(-2,3)$
- b) Déterminer les antécédents de  $(0,1)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,-3)$ .
- c) Soit  $(x', y')$  un élément de l'ensemble d'arrivée. A quelle condition  $f$  est-elle bijective?

### Exercice 3

Soient  $f$  une application de  $E$  dans  $F$  et  $g$  une application de  $F$  dans  $G$ .

Montrer que :

- si  $f$  et  $g$  sont injectives, alors  $g \circ f$  est injective
- si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f$  est surjective
- si  $f$  et  $g$  sont bijectives, alors  $g \circ f$  est bijective
- si  $g \circ f$  est injective, alors  $f$  est injective
- si  $g \circ f$  est surjective, alors  $g$  est surjective.

### Exercice 4

1.- Soient  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ ,  $g$  et  $g'$  deux applications de  $F$  dans  $G$ .

Montrer que si  $g \circ f = g' \circ f$  et  $f$  est surjective, alors  $g = g'$ .

2.- Soient  $f$  et  $f'$  deux applications de  $E$  dans  $F$ , et  $g$  une application de  $F$  dans  $G$ .

Montrer que si  $f$  est injective et  $g \circ f = g \circ f'$ , alors  $f = f'$

### Exercice 5

Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $F$ ,  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ ,  $\bar{A}$  le complémentaire de  $A$  dans  $E$  et  $\bar{B}$  le complémentaire de  $B$  dans  $F$ .

Montrer que :

- si  $f$  est injective, alors  $f(\bar{A}) \subset \bar{f(A)}$
- si  $f$  est surjective, alors  $\bar{f(A)} \subset \bar{f(\bar{A})}$

### Exercice 6

De combien de façons peut-on garer

- a) trois voitures dans un parking à 5 places ?
- b) cinq voitures dans un parking à 5 places ?
- c) cinq voitures dans un parking à 3 places ?

### Exercice 7

De combien de façons peut-on répartir 5 objets dans 5 cases que l'on désigne par  $A, B, C, D$  et  $E$ ,

- a) si les cases peuvent contenir 0, 1 ou plusieurs objets?
- b) Si chaque case ne peut contenir qu'un seul objet?
- c) Si la case  $A$  doit être vide?
- d) Si une et une seule case est vide?