Fonctions continues

1. Continuité en un point x_0

Soit f une fonction définie sur I et $x_0 \in I$

1.1 Définition :

f est continue en x_0 si f admet une limite finie en x_0 et cette limite est $f(x_0)$, autrement dit, f est continue en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple : Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si} \quad x \neq -1 \\ f(-1) = -2 \end{cases}$

f est elle continue en $x_0 = -1$?

$\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim\limits_{x \to -1} x - 1 = -2 = f(-1)$

Donc f est continue en $x_0 = -1$

1.2 Continuité à gauche – Continuité à droite :

- Si f est définie sur $[x_0 ; x_0 + \alpha[,\ \alpha > 0$, f est continue à droite de x_0 si la $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$

- Si f est définie sur $]x_0 - \alpha ; x_0]$, f est continue à gauche de x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

On rappelle que f admet une limite en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

Donc f est continue en x_0 si et seulement f est continue à gauche en x_0 et continue à droite en x_0, c'est-à-dire si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

Exemple :

$$\begin{cases} f(x) = x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ f(x) = 2x - 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (2x - 1) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x - 1) = -1$$

Donc f est continue en x_0

1.3 Opérations sur les fonctions continues en un point

Si f et g sont continues en x_0 alors $f + g, \lambda.f (\text{ou } \lambda \in \mathbb{R})$ et $f.g$ sont continues en x_0.

Si de plus $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

Démonstration : f et g sont continues en x_0, donc

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{et} \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$$

$$\text{alors} \lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} [f(x)+g(x)] = f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0)$$

2. Continuité sur un intervalle

2.1 Définition

On dit que f est continue sur $]a,b[$ si elle est continue en chaque point de cet intervalle.

f est continue sur $[a,b]$, si elle est continue sur $]a,b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b

Graphiquement, une fonction est continue si la courbe représentative de cette fonction est continue

Conséquences

- Toute fonction constante est continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition
- Si f est continue et positive sur I, alors $\sqrt{f}$ est continue sur I

2.2 Propriétés des fonctions continues

Théorème

Si f est continue sur $[a,b]$ alors l'image de $[a,b]$ par f est un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires

Soient a et b deux éléments de l'ensemble de définition de f tels que a < b.

Si f est continue sur $[a,b]$ alors quel que soit y_0 appartenant à $[f(a);f(b)]$ ou $[f(b);f(a)]$, il existe au moins $c \in [a,b]$ vérifiant $f(c) = y_0$; en d'autres termes, quel que soit $y \in [f(a);f(b)]$ ou $[f(b);f(a)]$, l'équation $y_0 = f(x)$ admet au moins une solution $c \in [a,b]$.

Si, de plus, f est strictement monotone, cette solution est unique.

Cas particulier :

Si f est continue sur $[a,b]$ et $f(a).f(b) < 0$ l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]a,b[$

2.3 Prolongement par continuité.

Soit I un intervalle de IR, x_0 un élément de I, et f une fonction définie sur I - {x_0}.

Si f admet une limite finie en x_0, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ est finie ou $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ est finie, alors f est prolongeable par continuité en x_0

On obtient une fonction continue g en posant :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) \quad \text{si} \quad x = x_0 \\ g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \end{cases}$$

Cette fonction g, continue en x_0, est appelée prolongement de f par continuité en x_0