Fonctions numériques réelles : changement de repère

On rappelle que l'équation d'une courbe (C) est la relation que vérifient les coordonnées des points de (C).

Soit (C) la courbe représentative d'une fonction f. $y = f(x)$ est donc l'équation de (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

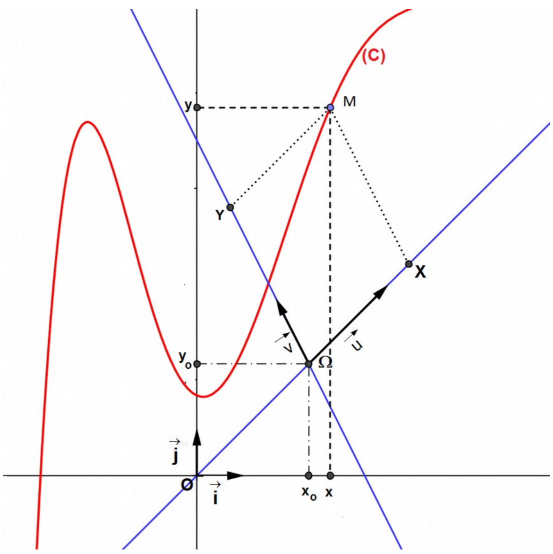
Si M(x ;y) un point de (C), alors $y = f(x)$. Soient $\Omega(x_0;y_0)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}, \vec{v}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$ (où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non colinéaires) et soit $(X;Y)$ les coordonnées du point M dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$. Nous avons :

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$$
$$\vec{v} = c\vec{i} + d\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{i} + Y\vec{j}$$
$$\overrightarrow{O\Omega} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$$
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$
$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X\vec{u} + Y\vec{v}$$
$$x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + X(a\vec{i} + b\vec{j}) + Y(c\vec{i} + d\vec{j})$$
$$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + Xa + Yc)\vec{i} + (y_0 + Xb + Yd)\vec{j}$$

d'où $\begin{cases} x = x_0 + aX + cY \\ y = y_0 + bX + dY \end{cases}$ (formule de changement de repère)

Pour avoir l'équation de (C) dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$ on porte les expressions X et Y dans l'équation $y = f(x)$



CC BY SA

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

On note (C) la courbe de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

Donner l'équation de la courbe (C) dans le repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ où $\Omega(-1;-2)$, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

La formule de changement de repère est $\begin{cases} x=-1+1.X+0.Y \\ y=-2+1.X+1.Y \end{cases}$

Ce qui donne $\begin{cases} x=-1+X \\ y=-2+X+Y \end{cases}$

Remplaçons x et y par leurs expressions dans l'équation y = f(x) : qui s'écrit $-2+X+Y=\frac{(-1+X)^2}{-1+X+1}$.

Ce qui donne $-2+X+Y=\frac{X^2-2X+1}{X}$

On a alors $-2+X+Y=X-2+\frac{1}{X}$ d'où $Y=\frac{1}{X}$

L'équation de (C) dans le repère nouveau repère $(\Omega;\vec{u},\vec{v})$ est donc $Y=\frac{1}{X}$

Remarques

- Dans le cas où $\vec{u}=\vec{i}$ ou $\vec{v}=\vec{j}$ (c'est-à-dire a = 1, b = 0, c = 0, d = 1) les formules s'écrivent $\begin{cases} x=x_0+X \\ y=y_0+Y \end{cases}$: On a seulement un changement d'origine ou translation d'axes.

- Soit $Y=F(X)$ l'équation de (C) dans le repère $(\Omega,\vec{u},\vec{v})$
  - Si F est paire l'axe des Y est un axe de symétrie et
  - Si F est impaire, Ω est un centre de symétrie