Corrigé exercice 1 Bacc série D 2015

Exercice 1

Soit $f(x)=z'=\frac{iz-5+i}{z-4}$ où z est un nombre complexe.

A tout point M(z) on associe le point M'(z')

1) a) Domaine de définition de f : $D_f=\mathbb{C}-\{4\}$.

b) Résolution de l'équation f(z)= z

$f(z)=z \quad z=\frac{iz-5+i}{z-4}$

$z(z-4)=iz-5+i$

$z^4+(-4-i)z+5-i=0$

$\Delta=(-4-i)^2+4(5-i)=-5+12i$

Soit $\delta=\alpha+i\beta$ une racine de Δ . On a $\Delta=\alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta$ .et $|\Delta|=|\delta^2|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{169}=13$

On a : $\begin{cases}\alpha^2-\beta^2=-5\\ 2\alpha\beta=12\\ \alpha^2+\beta^2=13\end{cases}$

Par addition membre à membre de la première et la troisième équation on a $2\alpha^2=8$ donc $\alpha=2$ .ou $\alpha=-2$

Par soustraction membre à membre de la première et la troisième équation, on a $2\beta^2=18$ donc $\beta=3$. $\beta=-3$

$2\alpha\beta=12$ > 0, donc α et β sont de même signe., alors $\delta=2+3i$ ou $\delta=-2-3i$.

On va prendre $\delta=2+3i$

On a alors $z=\frac{4+i-2-3i}{2}=\frac{2-2i}{2}$, ou $z=\frac{4+i+2+3i}{2}=\frac{6+4i}{2}=3+2i$

$S=\{3+2i;1-i\}$.

2) Posons $z_A=-2+i$, $z_B=1-i$ et $z_C=3+2i$

a) Ensemble (D) tel que f(z) soit réel

Posons z = x +i y, avec $(x;y)\neq(4;0)$

$f(z)=\frac{iz-5+i}{z-4}=\frac{i(x+iy)-5+i}{x+iy-4}=\frac{(ix-y-5+i)(x-4-iy)}{(x-4+iy)(x-4-iy)}$

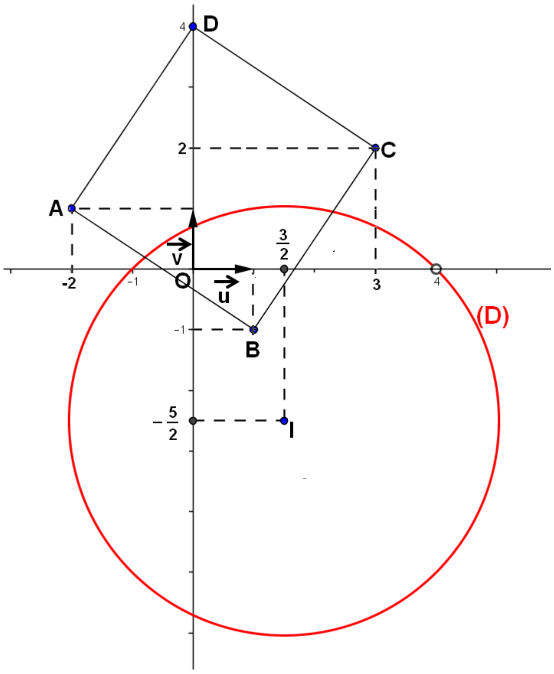
A vérifier $f(z)=\frac{(4y+20+y)+i(x^2+y^2-3x+5y-4)}{(x-4)^2+y^2}$

Im (f(z))= 0 si et seulement si $\frac{(x^2+y^2-3x+5y-4)}{(x-4)^2+y^2}$ donc si et seulement $x^2+y^2-3x+5y-4=0$

$$x^2+y^2-3x+5y-4=(x^2-3x)+(y^2+5y)-4=(x^2-2\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2)+(y^2+2\left(\frac{5}{2}\right)y+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2)-4=0$$

$$(x-\frac{3}{2})^2+(y+\frac{5}{2})=\frac{50}{4}$$

(D) est donc le cercle de centre $I\left(\frac{3}{2};-\frac{5}{2}\right)$ et de rayon $r=\sqrt{\left(\frac{50}{4}\right)}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, privé du point de coordonnées (4;0)



b) On pose $Z=\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}$

$$Z=\frac{-2+i-1+i}{3+2i-1+i}=\frac{-3+2i}{2+3i}=\frac{(-3+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$$

$$Z=\frac{(-6+9i+4i+6)}{(4-6i+6i+9)}=\frac{13i}{13}=i$$

$Z=i$ donc $|Z|=|i|=1$ et $\operatorname{Arg} Z=\operatorname{Arg} i=\frac{\pi}{2}$

Ainsi $Z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

$|Z|=\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=1$ donc $|z_A-z_B|=|z_C-z_B|$, ce qui signifie $AB=CB$

$\operatorname{Arg}Z=\operatorname{Arg}\left(\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$, donc $(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA})=\frac{\pi}{2}$

Ainsi, ABC est un triangle isocèle rectangle en B.

3) Affixe du point D tel que ABCD soit un carré

ABCD est un carré si $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

Ce qui signifie $z_D - z_A = z_C - z_B$.

ou $z_D = 3+2i-1+i-2+i = 4i$.

4) Soit S la similitude plane directe de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et S(B) = C.

Son écriture complexe est $z' = az+b$.

$|a| = \sqrt{2}$ et $\operatorname{Arg} a = \frac{\pi}{4}$, donc $a = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i.\sin\frac{\pi}{4}) = 1+i$

b) Valeur de b

S(B)=C, donc $z_C = a z_B + b$, ou $3+2i = (1+i)(1-i)+b$

D'où $b = 1+2i$

c) L'écriture complexe de S est $z' = (1+i)z+1+2i$

Le centre de S est le point $\Omega(\omega)$ telle que $\omega = (1+i)\omega+1+2i$

Ce qui donne $\omega = \frac{1+2i}{1-(1+i)} = -2+i = z_A$

Ainsi le centre de S est A