Corrigé problème Bacc série D 2015

Problème

Soit f la fonction définie par $f(x)=\ln(x+1)+e^{-x}$.

Elle est définie sur $]-1;+\infty[$.

1) Soit g la fonction définie par $g(x)=x+1-e^{x}$.

a) g est définie sur $\mathbb{R}$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=1-e^{x}$

g'(x)= 0 si et seulement si x = 0

g'(x) > 0 si x < 0 et g'(x) < 0 si x > 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g'(x)		+	0	−	
g(x)		↗	0	↘	

b) D'après l'étude des variations précédente, g admet comme valeur maximale 0.

Donc $g(x)\leqslant 0$ pour tout réel x

2)a) $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)=0^+$, donc $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(x+1)=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to-1^+}e^{-x}=e^{-1}$ donc $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\ln(x+1)+e-x=-\infty$

La courbe de f admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées d'équation x = -1.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)+e^{-x}=+\infty$

c) Si $x\in D_f=]-1;+\infty[$, alors x > -1 et $x+1\neq 0$, alors on peut multiplier et diviser ln((x+1) par (x+1)

Ainsi $f(x)=(x+1)\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}+\dfrac{1}{e^{x}}$

Et $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x+1}{x}\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}+\dfrac{1}{xe^{x}}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=1$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x+1)}{x}\right)=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1\cdot 0=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x.e^{x})=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x.e^{x}}=0$.

Ainsi $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}\frac{\ln(x+1)}{x}+\frac{1}{xe^{x}}=0$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

Donc la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique (x'x).

3) a) $f(x)=\ln(x+1)+e^{-x}$ donc $f'(x)=\frac{1}{x+1}-e^{-x}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{e^{x}}=\frac{e^{x}-(x+1)}{e^{x}(x+1)}$

Ainsi $f'(x)=-\frac{g(x)}{e^{x}(x+1)}$

b) Tableau de variation de f

$e^{x}(x+1)>0$ et d'après le résultat de 1)b), $g(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in D_f$, donc $-\frac{g(x)}{e^{x}(x+1)}\leqslant 0$ pour tout $x\in D_f$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)=-\frac{g(x)}{(x+1).e^{x}}$	‖	+	0	+	
f(x)	‖ $-\infty$	↗			$+\infty$

4) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $D_f=]-1;+\infty[$ et $\lim_{x\to-1^{+}}f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, donc f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$.

$0\in]-\infty;+\infty[$ donc 0 possède un antécédent unique dans $]-1;+\infty[$; en d'autres termes il existe une réel unique α dans $]-1;+\infty[$ tel que $f(\alpha)=0$ ..

Comme f(0)= 1 > 0 et $\lim_{x\to-1^{+}}f(x)=-\infty$, on a $-1<\alpha<0$.

b) Equation de la tangente en x_0= 0

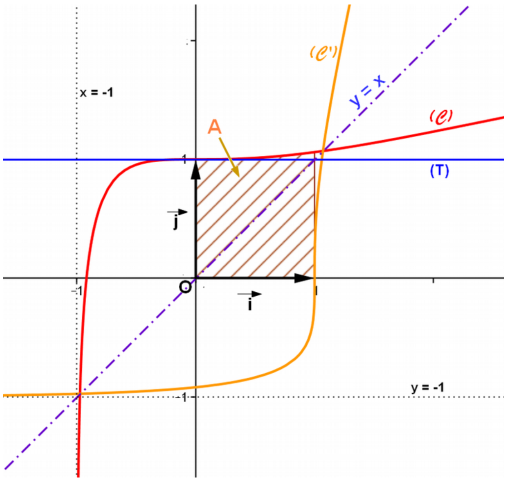
L'équation en 0 est y = f'(0) (x-0)+ f(0)

. $f'(x)=\frac{1}{x+1}-e^{-x}$ donc $f'(0)=\frac{1}{0+1}-e^{-0}=1-1=0$

$f(x)=\ln(x+1)+e^{-x}$ donc $f(0)=\ln(0+1)+e^{-0}=1$

Ainsi, l'équation de la tangente en 0 est y = 1

5)



6) Détermination de a et b tels que $\frac{x}{x+1}=a+\frac{b}{x+1}$

$$\frac{x}{x+1}=a+\frac{b}{x+1}=\frac{a(x+1)+b}{x+1}=\frac{ax+a+b}{x+1}$$

Comme les dénominateurs sont égaux, on a x = ax +a+b

Par identification, a = 1 et a+b = 0.

Ce qui donne a = 1 et b = -1

Autre méthode

$$\frac{x}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x+1}{x+1}-\frac{1}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$$

b) Soit k la fonction définie par k(x)= ln(x+1)

Posons u'(x) = 1 et v(x) = ln(x+1)

On a k(x)= u'(x). v(x), et u(x)= x, $v'(x)=\frac{1}{x+1}$

Soit K une primitive de k,

$$K(x)=\int k(t)dt=[u(t).v(t)]-\int \frac{t}{t+1}dt$$

$$K(x)=[x.\ln(x+1)]-\int(1-\frac{1}{x+1})dx$$

$$K(x)=x\ln(x+1)-(x-\ln(x+1))$$

$$K(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$$

L'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe des abscisses , et les droites d'équations x = 0 et x = 1 est , en cm^2

$$A=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 \ln(x+1)-e^{-x}dx=[K(x)-[-e^{-x}]]_0^1$$

$$A=[K(1)-[-e^{-1}]]-[K(0)-[-e^{0}]]$$

$$A=2\ln 2-e^{-1}$$

$$A\simeq 1{,}01\,cm^2 \quad .$$

7)a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $D_f=]-1;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, donc f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur $J=]-\infty;+\infty[$.

b) Alors f admet une réciproque f^{-1} de $J=]-\infty;+\infty[$ sur $]-1;+\infty[$, dont la courbe est la symétrique de celle de f par rapport à la droite d'équation y = x.