Corrigé Problème Bacc A 2014

Problème

$f(x) = 1 - 2x + e^x$

1.- a) ***Calcul de*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

b) *Vérifions que* $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{e^x}{x}\right)$

$f(x) = 1 - 2x + e^x$

En divisant et en multipliant f(x) par x, on a :

$f(x) = x\frac{(1 - 2x + e^x)}{x}$

$= x\left(\frac{1}{x} - \frac{2x}{x} + \frac{e^x}{x}\right)$

Ainsi $f(x) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{e^x}{x}\right)$

c) ***Calcul de*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{e^x}{x}\right) = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{e^x}{x}\right)$

Ainsi $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

3.- a) ***Calcul de f '(x)***

$f'(x) = 0 - 2 + e^x$ donc $\boxed{f'(x) = -2 + e^x}$

b) ***Tableau de variation de f***

f '(x)= 0 si et seulement si $-2 + e^x = 0$, donc si et seulement si x = ln 2

f '(x) > 0 si et seulement si $e^x > 2$

ou x > ln 2

Ainsi f '(x) <0 si x< ln 2.

x	$-\infty$		ln2		$+\infty$
f '(x)		−	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	3-ln2	↗	$+\infty$

3.-*a)* ***Détermination du point d'intersection de (C) avec l'axe des ordonnées***.

C'est le point de (C) d'abscisse x = 0. Son ordonnée est $f(0) = 1 - 2.0 + e^0 = 1 - 0 + 2.1 = 2$
Alors l'intersection d (C) avec l'axe des ordonnées es le point A (0, 2)

b) ***Equation de la tangente en A***
L'équation de la tangente en x_0 est y = $f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
Pour x_0= 0, on a $f'(x_0)$ = $f'(0) = -2 + e^0 = -2 + 1 = -1$

$$f(0) = 1 - 2.0 + e^0 = 1 + 1 = 2$$

L'équation de la tangente en A est donc $\boxed{y = -x+2}$

4.- ***Calcul de*** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-2x + 1)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-2x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} (1 - 2x + e^x - (-2x + 1)) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x$

donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-2x + 1) = 0$

Interprétation :

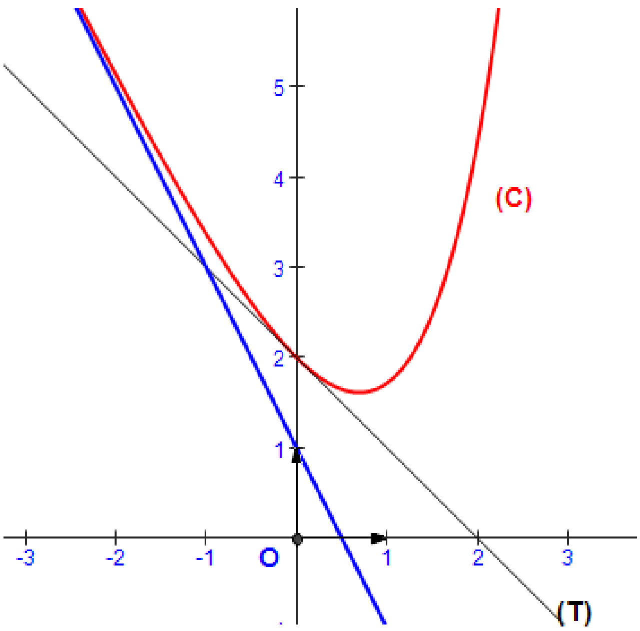
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (-2x + 1) = 0$ donc la droite d'équation y = -2x +1 est une asymptote oblique en $-\infty$

5.- ***Valeurs exacte de f(1) et de f(2)***

$f(1) = 1 - 2.1 + e^1 = -1 + e^1$

$f(2) = 1 - 2.2 + e^2 = -3 + e^2$

6.- ***Construction*** :



7.- a) ***Calcul d'une primitive de f***

$x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$

$x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x$

$x \mapsto e^x$ est une primitive de $x \mapsto e^x$

Donc la fonction F définie par $\boxed{F(x) = x - x^2 + e^x}$ est une primitive de f.

b) Notons A l'aire géométrique, en cm^2, du domaine plan limité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = ln 2.

Alors $A = \left(\int_0^{\ln 2} f(x)dx\right).1cm^2$

$$\int_0^{\ln 2} f(x)dx = [F(x)]_0^{\ln 2} = F(\ln 2) - F(0)$$

$$= \left(\ln 2 - (\ln 2)^2 + e^{\ln 2}\right) - \left(0 - 2.0 + e^0\right) = 1{,}21$$

Ainsi $\boxed{A = 1{,}21\ cm^2}$