Corrigé problème Bacc série A 2015

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(\ln x)^2-1$

1, a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x)^2=+\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$

Interprétation : La droite d'équation x = 0 est une asymptote (parallèle à l'axe des ordonnées) à la courbe de f.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

2, On admet que $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x}=0$. Alors la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique (x'x).

3, a) $f(x)=(\ln x)^2-1$

On rappelle que si u est une fonction dérivable, alors $(u^2)'=2.u.u'$

Ainsi si u(x)= ln x, $u'(x)=\frac{1}{x}$ et $2.u(x).u'(x)=2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

Alors $f'(x)=2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}-0$

d'où $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$.

b) On sait que :

- ln x > 0 si et seulement si x > 1
- ln x < 0 si et seulement si 0< x < 1
- ln 1 = 0

Et puisque x > 0 pour tout $x\in]0;+\infty[$, on a :

- f'(x) > 0 si et seulement si x > 1
- f'(x) < 0 si et seulement si 0< x < 1
- f'(x) = 0

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

4, a) On rappelle que $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Donc , $f(x)=(\ln x)^2-1=(\ln x)^2-1^2=(\ln x-1)(\ln x+1)$

b) Résolution de l'équation f(x)= 0

f(x)= 0 si et seulement si $(\ln x-1)(\ln x+1)=0$

donc si $\ln x-1=0$ .ou $\ln x+1=0$

ln x = 1 ou ln x = -1.

Pour ln x = 1, on a ln x = ln e donc x = e

Pour ln x = -1 , on a $\ln x=-\ln e=\ln e^{-1}$, donc $x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Ainsi $S=\left\{\frac{1}{e};e\right\}$

$S=\left\{\frac{1}{e};e\right\}$

Les points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses sont donc les points $A\left(\frac{1}{e};0\right)$ et

$B(e;0)$.

5. a) B est un point d'inflexion pour la courbe de f si et seulement si la dérivée seconde f'' de f s'annule et change de signe en e.

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, donc $f''(x)=\frac{\frac{2}{x}.x-1.2\ln x}{x^2}=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$.

f''(x)= 0 si et seulement si x = e.

Tableau de signe

x	0		e		$+\infty$
f ''(x)	‖	+	0	−	

f'' s'annule est change de signe en e, donc le point B est un poins d'inflexion.

b) équation de la tangente en B

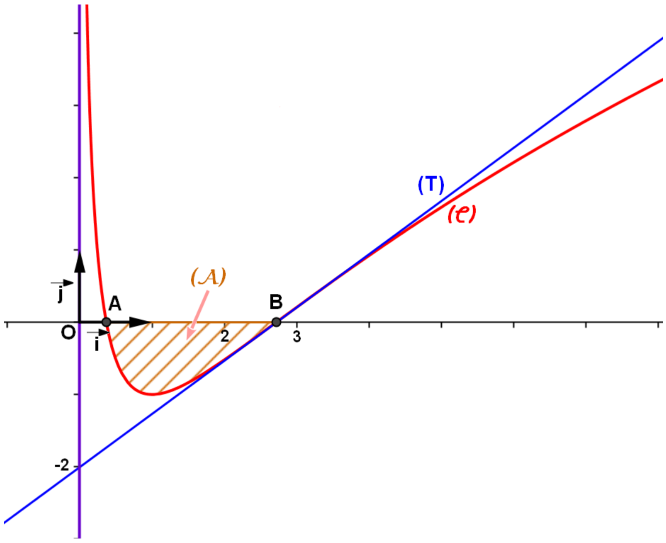
L'équation de la droite (T) tangente à (C) en B est y = f'(e) (x-e) + f(e)

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$ donc $f'(e)=\frac{2\ln e}{e}=\frac{2}{e}$

f(e) = 0,

Donc l'équation de (T) est $y=\frac{2}{e}x-2$.

6. Courbe



Pour A2 seulement

7. $F(x)=x[(\ln x)^2-2\ln x+2]-x$

F est une primitive de f si F'(x) = f(x) pour tout x du domaine de définition de f.

Posons u(x) = x et $v(x)=(\ln x)^2-2\ln x+2$

On a u'(x) = 1 et $v'(x)=\frac{2(\ln x)}{x}-\frac{2}{x}$

On rappelle que (uv)'= u'v+ v'u

On a donc $F'(x)=1[(\ln x)^2-2\ln x+2]+x.[2\frac{\ln x}{x}-\frac{2}{x}]-1=(\ln x)^2-2\ln x+2+2\ln x-2-1$

$F'(x)=(\ln x)^2-1=f(x)$ donc F est une primitive de f.

b) L'aire du domaine délimité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\frac{1}{e}$ et

x = e est , en unité d'aire : $A=\left|([F(x)]_{\frac{1}{e}}^{e})\right|=\left|(F(e)-f(\frac{1}{e}))\right|$

$F(x)=x[(\ln x)^2-2\ln x+2]-x$ donc $F(e)=e[(\ln e)^2-2\ln e+2]-e=e(1^2-2.1+2)-e=0$

$F(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}[(\ln\frac{1}{e})^2-2\ln\frac{1}{e}+2]-\frac{1}{e}=\frac{1}{e}(((-1)^2)-2(-1)+2)-\frac{1}{e}=\frac{4}{e}$

Ainsi $A=\left|(0-\frac{4}{e})\right|u.a$

L'unité graphique est de 2 cm, ainsi $1u.a.=2.2cm^2=4cm^2$

Et $A=\left|(0-\frac{4}{e})\right|4cm^2=1,47.4cm^2$

$A\simeq 5,9cm^2$