Corrigé Problème Bacc série A 2016

Problème

Soit f la fonction définie par $f(x)=x-\ln x$.

1) x est défini quel que soit le réel x et ln x est définie si x > 0 donc $D_f=]0;+\infty[$.

2-a) Pour x > 0 , $f(x)=x-\ln x=x\cdot 1-x\cdot\frac{\ln x}{x}$

En mettant x en facteur on a $f(x)=x(1-\frac{\ln x}{x})$

b) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{\ln x}{x})=1$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\frac{\ln x}{x})=+\infty$

Ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=-\infty$

Ainsi $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$.

Alors la droite d'équation x = 0 est une asymptote (verticale) pour la courbe de f.

3) a) Pour x > 0, $f'(x)=1-\frac{1}{x}$

$f'(x)=\frac{x-1}{x}$

b) f '(x) = 0 si et seulement si x = 1,

x -1 > 0 si x > 1

x -1 < 0 si x < 1.

Ainsi, pour tout x > 0, $f'(x)=\frac{x-1}{x}>0$ si x > 1

$f'(x)=\frac{x-1}{x}<0$ si x < 1.

Alors, sur $]0;1[$, f est strictement décroissante

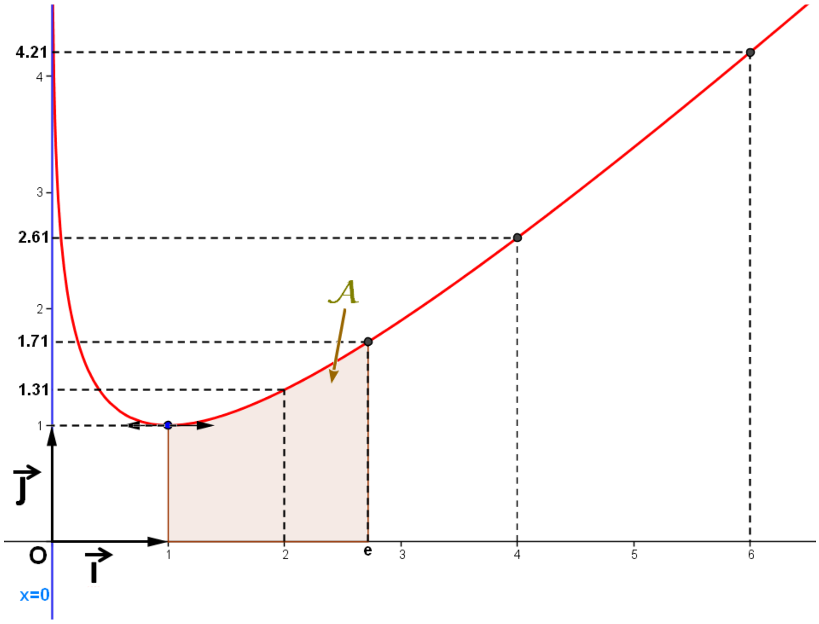
et sur $]1;+\infty[$, f est strictement croissante.

x	0		1		$+\infty$
f '(x)	$\|\|$	−	0	+	
f(x)	$\|\|$ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4) Tableau de valeurs

x	2	e	4	6
f(x)	1, 31	1,71	2,61	4,21

5) Courbe de f



Pour A2 seulement

6) F est la fonction définie pour tout x > 0 par $F(x)=\frac{x^2}{2}-x\ln x+x$

a) F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$ si F'(x) = f(x) pour tout $x\in]0;+\infty[$.

Posons $g(x)=\frac{x^2}{2}$, u(x) = x et v(x) = ln x.

Alors $g'(x)=2\frac{x}{2}=x$, u'(x)= 1 et $v'(x)=\frac{1}{x}$ et x.lnx = u(x).v(x),

Comme (u.v)' = u'v + v'u, on a $(uv)'(x)=1.\ln x+x.\frac{1}{x}=\ln x+1$

Alors $F'(x)=x-(\ln x+1)+1$

$F'(x)=x-\ln x=f(x)$ D'où F est une primitive de f sur $]0;+\infty[$.

b- L'aire du domaine délimité par la courbe, l'axe (x'Ox) et les droites d'équations x = 1 et x = e est , en unité d'aire, $A=|F(e)-F(1)|=\left|\frac{e^2}{2}-e.\ln e+e-[\frac{1^2}{2}-1.\ln 1+1]\right|=\left|\frac{e^2}{2}-e+e-\frac{1}{2}-1\right|$

$A=\left|\frac{e^2}{2}-\frac{3}{2}\right|u.a$

L'unité graphique étant 1cm, l'unité d'aire est 1 cm².

Ainsi $A\simeq 2{,}19\,cm^2$