Corrigé Problème Bacc D 2016

A, Soit f la fonction définie par $f(x)=xe^{-x}+x-1$

1.- Soit g la fonction définie par $g(x)=(1-x)e^{-x}+1$.

g est définie sur IR

Elle est dérivable sur IR et $g'(x)=-e^{x}-(1-x)e^{-x}=(x-2)e^{-x}$.

x-2 = 0 si et seulement si x = 2.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
e^{x}		+		+	
$x-2$		−	0	+	
$e^{x}(x-2)$		−	0	+	

- g’(x) > 0 si x >2, donc g est strictement croissante sur] 2 ; +∞ [
- g’(x) < 0 si x < 2 , donc g est strictement croissante sur] -∞ ; 2 [

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	
g(x)		↘	**g(2)**	↗	

b) D’après ce résultat, g(2) est le minimum (absolu) de g(x).

Comme $g(2)=(1-2)e^{-2}+1=-e^{-2}+1$ > 0, g(x) >0 pour tout x de $\mathbb{R}$.

2) $f(x)=xe^{-x}+x-1$

$D_f=\mathbb{R}$ =] -∞ ; +∞ [

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}+x-1$

$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x-1=-\infty$

donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}+x-1$

$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^{x}}{x}}=0$ et $\lim_{x\to+\infty} x-1=+\infty$

donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=1,e^{-x}-xe^{-x}+1=(1-x)e^{-x}+1=g(x)$

D'après le résultat de 1) b), g(x) > 0 quel que soit x, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $+\infty$
f '(x)	+
f (x)	$-\infty \nearrow +\infty$

3) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x}+1-\frac{1}{x}=+\infty$

donc on a une branche parabolique de direction asymptotique (y'Oy) au voisinage de $-\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty} e^{-x}+1-\frac{1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x}}=0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}-1=-1$$

Ainsi, on a une asymptote oblique (D) d'équation y = x-1 au voisinage de $+\infty$.

$f(x)-(x-1)=xe^{-x}$

$e^{-x}>0$ quel que soit le réel x , donc :

f(x) – x > 0 si x > 0

f(x) – x < 0 si x < 0.

D'où : sur] $-\infty$; 0 [, (C) est en dessous de (D)

sur] 0 ; $+\infty$ [, (C) est au dessus de (D).

4) La tangente (T) à la courbe au point A a pour coefficient directeur f '(x_A), si x_A est l'abscisse de A.

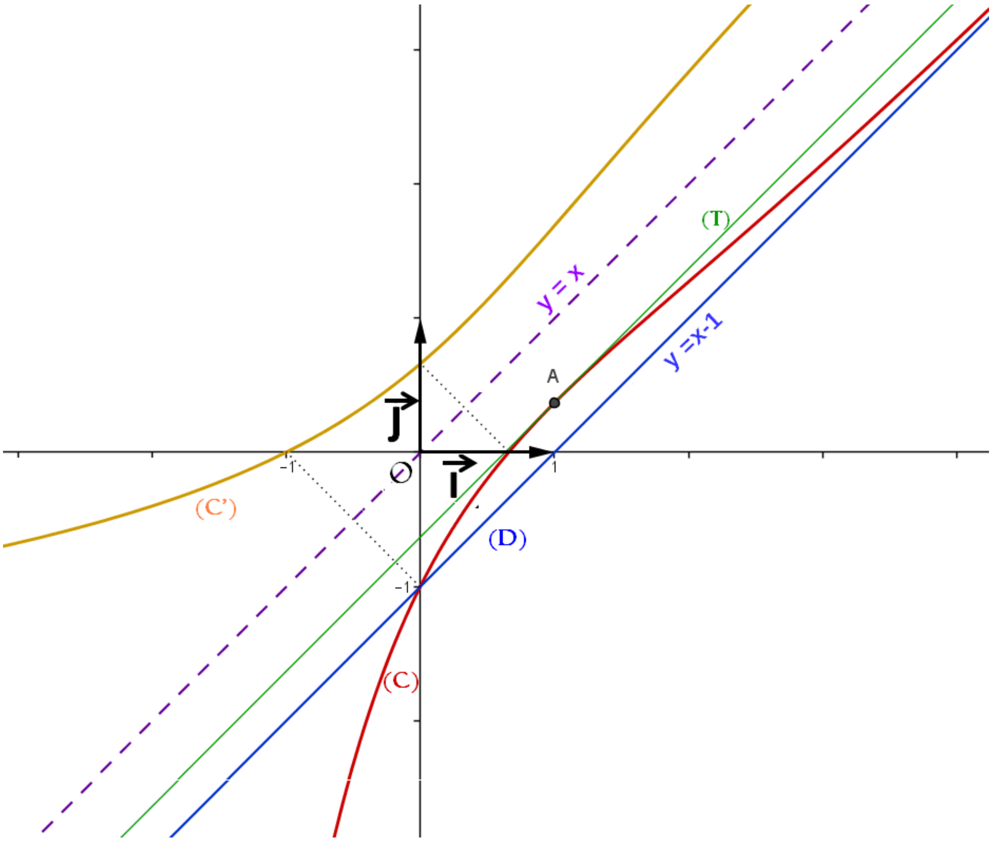
Comme (D) a pour coefficient directeur 1, la tangente (T) est parallèle à (D) si et seulement si f'(x_A) = 1

$f'(x_A)=(1-x_A)e^{-x_A}+1=1$ si 1- x_A=0. Donc si x_A= 1.

$$f(1)=\frac{1}{e^{1}}+1-1=\frac{1}{e}$$

Ainsi la tangente (T) à la courbe est parallèle à (D) au point $A(1,\frac{1}{e})$.

Courbe



6) L'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x = 0 et x = 1 et donnée par