Corrigé Problème Bacc série D 2014

Problème

Soit $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\frac{2}{x}$

1) a) ***Calcul de des limites de f***

$\lim_{x\to 0^+}(\ln x)^2=+\infty$ et $\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x}=+\infty$, donc $\boxed{\lim_{x\to 0^+} f(x)=+\infty}$

$\lim_{x\to +\infty}(\ln x)^2=+\infty$ et $\lim_{x\to +\infty}\frac{2}{x}=0$, donc $\boxed{\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty}$

b) ***Calcul de*** $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}$

On pose x=X^2. si x tend vers $+\infty$, alors X tend vers $+\infty$
Alors

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{X\to+\infty}\frac{(\ln X^2)^2}{X^2}=\lim_{X\to+\infty}\left(2\frac{\ln X}{X}\right)^2$$

Puisque $\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$, on a $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{X\to+\infty}\left(2\frac{\ln X}{X}\right)^2=0$

Ainsi $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0}$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}=0$, on a $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}+\frac{2}{x^2}=0$. D'où la courbe représentative de f admet une branche parabolique suivant (Ox) au voisinage de $+\infty$.

2) $g(x)=x\ln x-2$

a) ***Calcul des limites de g***

$\lim_{x\to0^+} g(x)=\lim_{x\to0^+} x\ln x-2=0-2$

$\lim_{x\to0^+} g(x)=-2$

$\lim_{x\to+\infty} x\ln x=+\infty$, donc $\lim_{x\to0^+} g(x)=+\infty$

b) ***Etude des variations de g***

g est dérivable sur son domaine de définition $g'(x)=1.\ln x+x.\frac{1}{x}-0$

$g'(x)=\ln x+1$

$g'(x)=0$ si et seulement si lnx = -1, donc si et seulement si $x=e^{-1}$

$g'(x)>0$ si et seulement si lnx > -1, donc si et seulement si $x>e^{-1}$

Alors, g est croissante sur $\left]e^{-1}\ ;\ +\infty\right[$

$\mathbf{g'(x)} > 0$ si et seulement si $\mathbf{x} < \mathbf{e}^{-1}$. Alors, g est décroissante sur $\left]\ 0\ ;\ \ \mathbf{e}^{-1}\right[$

Tableau de variation

x	0		e^{-1}		$+\infty$
g'(x)		$-$	0	$+$	
g(x)	-2	↘	$-e^{-1}-2$	↗	$+\infty$

c) g est continue et strictement croissante sur $\left[\ \mathbf{e}^{-1}\ ;\ +\infty\ \right[$. C'est donc une bijection de $\left[\ \mathbf{e}^{-1}\ ;\ +\infty\ \right[$ sur $\left[-\mathbf{e}^{-1}-2\ ;\ +\infty\ \right[$. $0 \in \left[-\mathbf{e}^{-1}-2\ ;\ +\infty\ \right[$ donc il existe un réel α unique de $\left[\ \mathbf{e}^{-1}\ ;\ +\infty\ \right[$ tel que $\mathbf{g(\alpha)} = 0$.

$\mathbf{g(2).g(e)} = \mathbf{(2\ln 2-2).(e-2)} < 0$, et g est croissante, donc $\mathbf{g(2)} < 0 < \mathbf{g(e)}$
alors $2 < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{e}$

Signe de g(x)

g(x) < - 2 si $\mathbf{x} \in \left]\ 0\ ;\ \mathbf{e}^{-1}\right[$.

g est croissante sur $\left[\ \mathbf{e}^{-1}\ ;\ +\infty\ \right[$ et $\mathbf{g(\alpha)} = 0$, donc si $\mathbf{x} \in \left]0\ ;\ \boldsymbol{\alpha}\ \right[$, g(x) < 0

si $\mathbf{x} \in \left]\ \mathbf{e}^{-1}\ ;\ +\infty\right[$, g(x) > 0

3) a) f est la somme de deux fonctions dérivable, donc dérivable. $\mathbf{f'(x)} = \frac{1}{2}\mathbf{(}2\mathbf{\ln x.}\frac{1}{\mathbf{x}}\mathbf{)} - \frac{2}{\mathbf{x}^2} = \frac{\mathbf{x\ln x}-2}{\mathbf{x}^2} = \frac{\mathbf{g(x)}}{\mathbf{x}^2}$

b) $x^2 > 0$ pour tout x > 0, donc f ' (x) et g(x) sont de même signe.

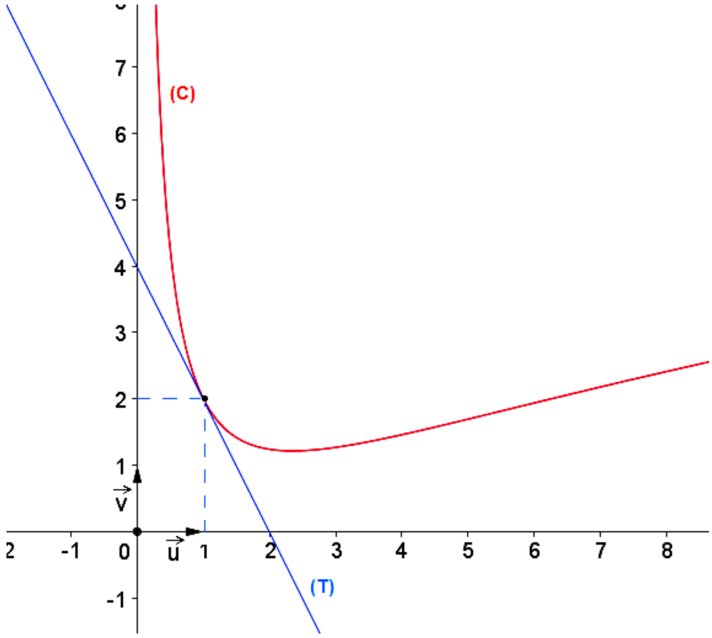
Tableau de variation de f

x	0		α		$+\infty$
g(x)		$-$	0	$+$	
f '(x)		$-$	0	$+$	
f(x)	$+\infty$	↘	1,12	↗	$+\infty$

4)a) ***Equation de la tangente au point d'abscisse x_0=1***

L'équation de cette tangente est y= f ' (1)(x-1) + f (1)
f '(1) = - 2 et f(1)= 2, d'où l'équation est y = - 2x + 4

b) ***Courbe de f***



5) a) $\int_{\alpha}^{e} \ln x dx = -\alpha \ln \alpha + \alpha$

Montrons que $\int_{\alpha}^{e} \frac{1}{2}(\ln x)^2 dx = \frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln \alpha)^2 + \alpha \ln \alpha - \alpha$

Posons $u' = \frac{1}{2}$ et $v = (\ln x)^2$. On a : $u = \frac{1}{2}x$ et $v' = 2\frac{\ln x}{x}$.

Alors $\int_{\alpha}^{e} \frac{1}{2}(\ln x)^2 dx = \left[\frac{1}{2}x(\ln x)^2\right]_{\alpha}^{e} - \int_{\alpha}^{e} \ln x dx = \left[\frac{1}{2}e(\ln e)^2 - \frac{1}{2}\alpha(\ln \alpha)^2\right] + \alpha \ln \alpha - \alpha$, d'où

$$\int_{\alpha}^{e} \frac{1}{2}(\ln x)^2 dx = \frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln \alpha)^2 + \alpha \ln \alpha - \alpha$$

b) $A = \left(\int_{\alpha}^{e} f(x) dx\right).1 cm^2$

$$\int_{\alpha}^{e} f(x) dx = \int_{\alpha}^{e} \left(\frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{2}{x}\right) dx = \frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln \alpha)^2 + \alpha \ln \alpha - \alpha + 2\ln e - 2\ln \alpha$$

$$\boxed{A = \left(\frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln \alpha)^2 + \alpha \ln \alpha - \alpha + 2\ln e - 2\ln \alpha\right) cm^2}$$

c) $\alpha \ln \alpha = 2$, donc

$$\frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln \alpha)^2 + \alpha \ln \alpha - \alpha + 2 - 2\ln \alpha = \frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\frac{2}{\alpha})^2 + 2 - \alpha + 2 - 2(\frac{2}{\alpha})$$

Finalement

$$A = \left(\frac{e}{2} + 4 - \frac{6}{\alpha} - \alpha\right) cm^2$$