# Corrigé exercice 1 Bacc série D 2014

**Exercice 1**

$$P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (a+ib)z - 8 + 16i$$

1.- ***Détermination de a et b***

2i est racine solution de l'équation P(z)= 0 si P(2i)=0

$$\begin{aligned} P(2i) &= (2i)^3 - (5+i)(2i)^2 + (a+ib)(2i) - 8 - 16i \\ &= -8i + 20 + 4i + 2ai - 2b - 8 - 16i \\ &= (-20 + 2a)i + 12 - 2b \end{aligned}$$

P(2i) = 0 si et seulement si -20 + 2a = 0 et 12-2b = 0
d'où $\boxed{a = 10 \text{ et } b = 6}$

On a alors $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + (10+6i)z - 8 - 16i$

2.- ***Résolution de l'équation P(z) = 0***

2i est une solution de P(z)= 0, donc on peut mettre (z-2i) en facteur.
L'algorithme de Horner donne :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -5-i | 10+6i | -8-16i |
| 2i | | 2i | -2-10i | 8+16i |
| | 1 | -5+i | 8-4i | 0 |

Alors

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + (-5+i)z + 8 - 4i)$$

P(z) =0 si et seulement si z = 2i ou $z^2 + (-5+i)z + 8 - 4i = 0$

Résolvons l'équation $z^2 + (-5+i)z + 8 - 4i = 0$

$$\Delta = -8 + 6i$$

Soit $\delta$ une racine de $\Delta$. Alors $\delta^2 = \Delta$
Posons $\delta = x + iy$ où x et y sont des réels.

$$\delta^2 = \Delta \text{ équivaut à } \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -8 + 6i \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = \sqrt{100} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

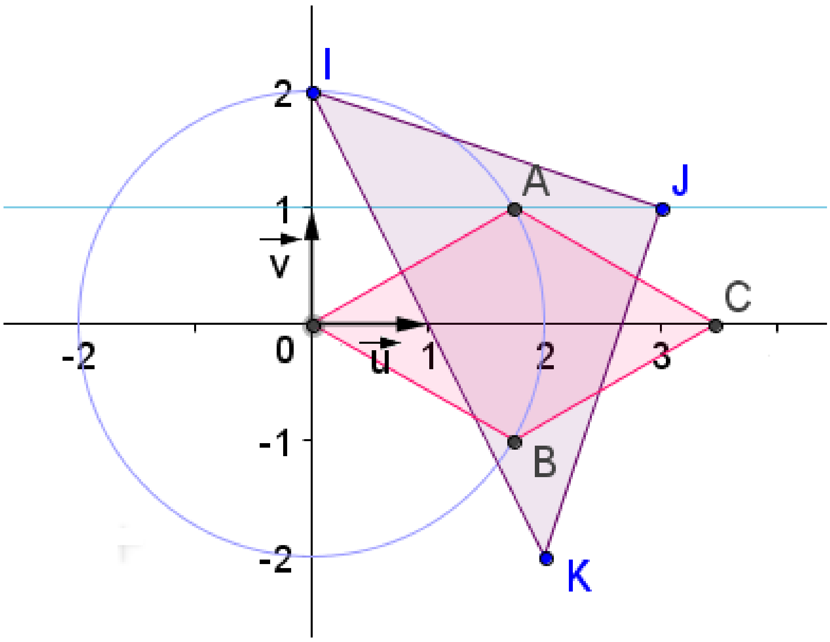
Ce qui donne $x^2 = 1$ et $y^2 = 9$ et $xy = 3 > 0$ , x et y sont donc de même signe.
On a donc x= 1 et y = 3 ou x = -1 et y = -3.
On va prendre $\delta = 1 + 3i$.

On a alors $z' = \dfrac{5 - i + 1 + 3i}{2} = 3 + i \quad z'' = \dfrac{5 - i - 1 - 3i}{2} = 2 - 2i$

Et $\boxed{S = \{2i\,; 3+i\,;\ 2-2i\ \}}$

3.- a**) *Construction*** :

$z_A = \sqrt{3}+i$ donc $OA = |z_A| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$. Le point A est le point d'ordonnée 1 dont la distance à l'origine est 2.




b) Montrons que (JI) et (JK) sont perpendiculaires

$$\frac{z_I - z_J}{z_K - z_J} = -i$$

Donc $(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JI}) = \arg\left(\frac{z_I - z_J}{z_K - z_J}\right) = \arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$.

D'où (JI) et (JK) sont perpendiculaires.

4.- $z_B = \overline{z_A} = \sqrt{3} - i$

a) $OA = |z_A| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = 2$

$OB = |z_B| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2$

$AB = |z_B - z_A| = \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{3}\,)^2+(-1-1)^2} = 2$

OA = OB = AB = 2, donc le triangle OAB est un triangle équilatéral.

b) AOBC est un losange, donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$, ce qui veut équivaut à $z_C - z_B = z_A - 0$

La résolution de cette équation donne $\boxed{z_C = 2\sqrt{3}}$

5.- S est la similitude plane directe qui transforme B en C et laisse invariant le point O:
i.e S(B)= C et S(O) = O. O est don le centre de la similitude.

Si z'=az+b est l'expression complexe de S, on a : $\begin{cases} z_C = a.z_B + b \\ 0 = a.0 + b \end{cases}$

Ce qui donne b =0 et $a = \frac{z_C}{z_B} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2}$

Ainsi l'expression complexe de S est $z' = \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} z$

$\left| \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right| = \sqrt{3}$, et $\arg\left( \frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\pi}{6}$, donc le rapport de S est $k = \sqrt{3}$, son angle est $\theta = \frac{\pi}{6}$ et son centre 0