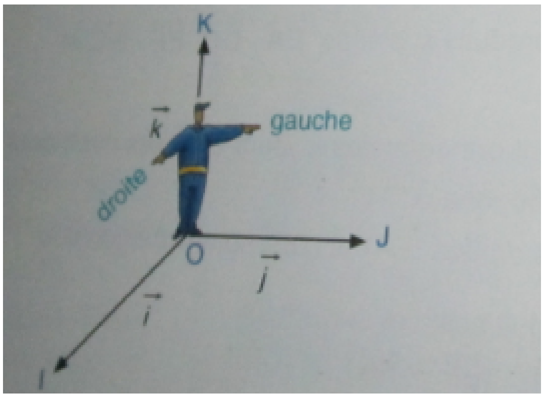
GEOMETRIE DANS L'ESPACE

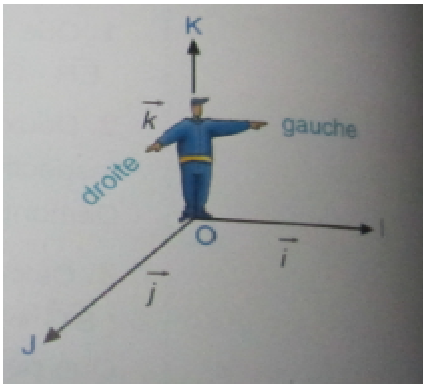
1. Orientation de l'espace

1.1 Règle du bonhomme d'Ampère

1.1.1 Explication

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace et O un point de l'espace et O un point de l'espace. On désigne par I, J, K les points définis par $\vec{OI}=\vec{i}, \vec{OJ}=\vec{j}, \vec{OK}=\vec{k}$. Les physiciens imaginent un observateur (nommé observateur d'Ampère) situé les pieds en O, la tête en K ; il regarde [OI] et [OJ]. Deux situations et deux seulement se présentent.





[OI] est à droite de [OJ] : par convention

la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est directe.

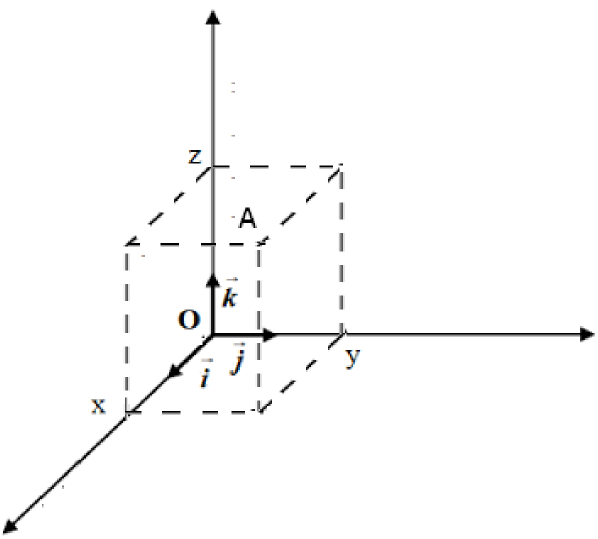
[OI] est à gauche de [OJ] : par convention :

la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indirecte.

1.1.2 Repérage dans l'espace

On peut munir l'espace d'un repère orthonormé (en général direct). Un point A de l'espace a trois coordonnées (x ; y ; z) : x est l'abscisse de A, y son ordonnée, et z sa côte.

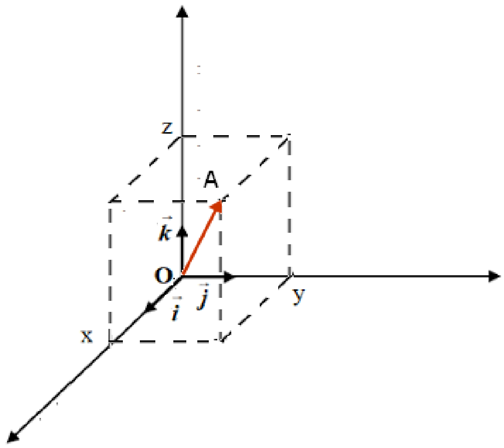
Ainsi, si on note I l'extrémité du vecteur $\vec{i}$, alors I(1,0,0), si on note J l'extrémité du vecteur $\vec{j}$, alors J(0,1,0), et si on note K l'extrémité du vecteur $\vec{k}$, alors K(0, 0,1)



Un vecteur a aussi trois composants dans l'espace : Si A (x, y, z), alors $\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Ainsi $\vec{i}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a alors $\overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$



2. Produit scalaire dans l'espace

2.1 Expression et propriétés

$\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace. Soit O un point de l'espace et A et B les points définis par

$\vec{OA} = \vec{u}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$. Les trois points O, A, B se trouvent dans un même plan (P). (P) n'est pas unique si O, A, B sont alignés.

2.1.1 Définition

On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\,.\,\vec{v}$ le produit scalaire $\vec{OA}\,.\,\vec{OB}$ défini dans le plan (P).

On admettra que cette définition est indépendante du choix du point O.

2.1.2 Expression du produit scalaire

- **Cas de deux vecteurs colinéaires**

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires.

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et de même sens, alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et de sens contraires, alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = - \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$.

Si l'un au moins des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul alors $\vec{u}\,.\,\vec{v} = 0$

- **Produit scalaire de deux vecteurs non nuls**

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et un point A. Soient B et C les points définis par :

$\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$

Expression à l'aide des projections

H désignant le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et K le projeté orthogonal de B sur la droite (AC) .

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{AB}\,.\,\vec{AC} = \vec{AB}\,.\,\vec{AH} = \vec{AC}\,.\,\vec{AK}$. (Fig 1)

• **Expression à l'aide du cosinus**

$\vec{u}\,.\,\vec{v}$ = $\vec{AB}\,.\,\vec{AC}$ = AB x AC x cos $B\hat{A}C$ (fig 2)

• **Expression à l'aide des normes**

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{v}-\vec{u}\|^2)$$

$$\vec{AB}\,.\,\vec{AC} = \frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2) \quad \text{(Fig 3)}$$

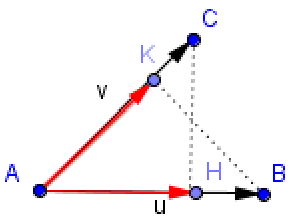


Fig 1

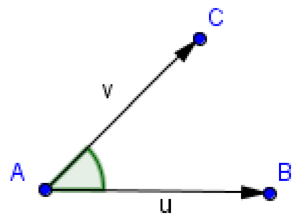


Fig 2

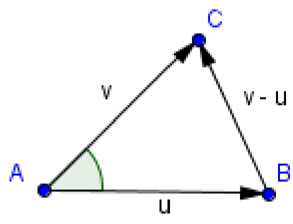


Fig 3

2.1.3 Produit scalaire dans un repère orthonormé

Une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace est orthonormale si les vecteurs de la base sont unitaires et deux à deux orthogonaux.

Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\,.\,\vec{v}=x.x'+y.y'+z.z'$

La norme de u notée ||u|| est le nombre réel positif ou nul défini par $\|\vec{u}\|=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$

Si A et B ont pour coordonnées respectives (x_A ; y_A ; z_A) et (x_B ; y_B ; z_B), la distance AB est égale au norme du vecteur $\vec{AB}$:

AB = $\|\vec{AB}\|$ = $\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

3. Orthogonalité dans l'espace

3.1 Orthogonalité de deux vecteurs

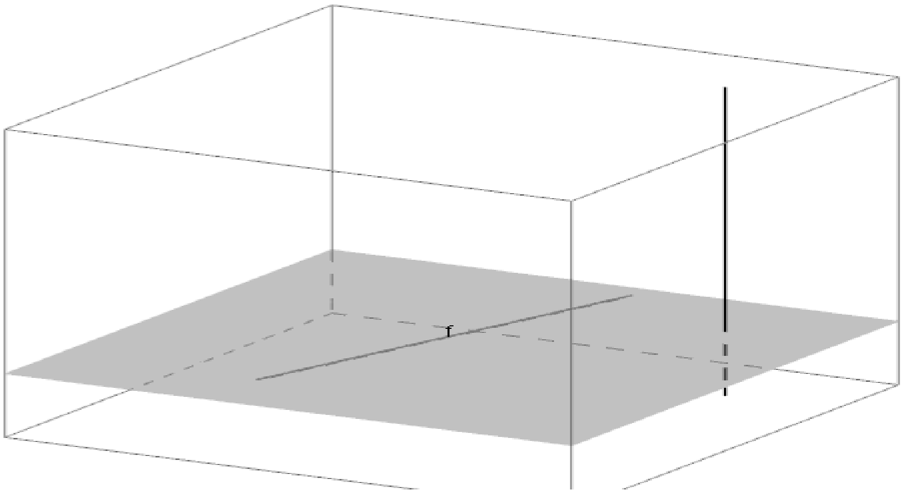
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul ($\vec{u}\,.\,\vec{v}$ = 0).

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur

3.2 Orthogonalité de deux droites

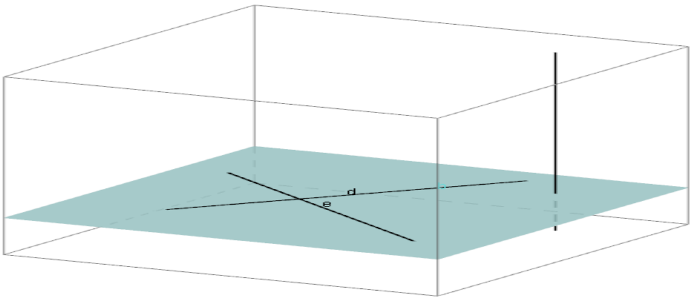
Soient deux droites (D) et (D') de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. (D) et (D') sont orthogonales si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

On réserve le vocabulaire « perpendiculaire » à deux droites orthogonales et sécantes de l'espace.



3.3 Droite orthogonale à un plan

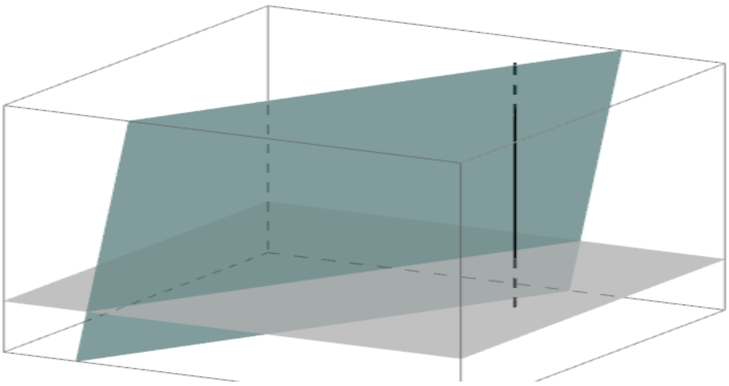
Une droite est orthogonale à un plan P si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



Pour démontrer qu'une droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale à un plan P , il suffit de trouver deux vecteurs $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ non colinéaires de P tel que $\vec{u} \cdot \vec{e}_1$ = 0 et $\vec{u} \cdot \vec{e}_2$ = 0.

3.4 Plan perpendiculaire

Deux plans P et P' sont perpendiculaires si l'un contient une droite orthogonale à l'autre.



3.5 Équation cartésienne d'un plan

Dans un repère orthonormal tout plan admet un équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0$$

où a, b, c, d sont des réels non tous nuls. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est alors normal à ce plan.

Réciproquement, l'ensemble des points M(x, y,z) dont les coordonnées vérifient :

ax + by + cz +d = 0

est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$

Exemple

Soit $\mathcal{P}$ le plan défini par le point A(3, -1, 2) et le vecteur normal. $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\\-5\end{pmatrix}$

$\vec{n}.\vec{AM}=0$ si 1(x-3)+(-3)(y+1) + (-5)(z – 2) = 0 si x -3y -5z + 4 = 0.

$\mathcal{P}$ a pour équation : x - 3y - 5z + 4 = 0.

4. Produit vectoriel

4.1 Définition

Soient $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ deux vecteurs

■ Si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont non colinéaires, le produit vectoriel de $\vec{u}$ *par* $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$,

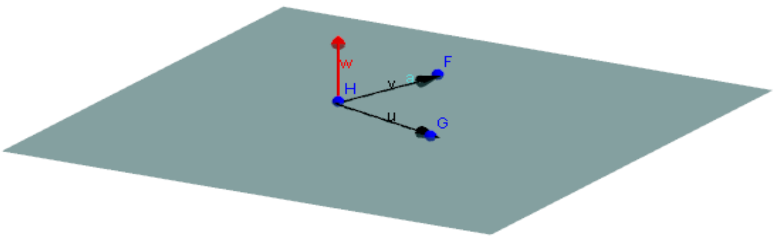
tel que :

► Le vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.

► La base ($\vec{u}\,;\vec{v}$: $\vec{u}\wedge\vec{v}$) est directe.

► la norme du vecteur $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est : || $\vec{u}\wedge\vec{v}$ || = || $\vec{u}$ ||x || $\vec{v}$ ||x sin $((\widehat{\vec{u}\,;\vec{v}}))$

■ si $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ sont colinéaires, $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.



- $\vec{u}\wedge\vec{v}$ se lit : $\vec{u}$ *vectoriel* $\vec{v}$. On rencontre aussi la notation $\vec{u}\ x\ \vec{v}$
- pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}\wedge\vec{u}=\vec{0}$ et $\vec{0}\wedge\vec{v}=\vec{0}$

Exemple

Soient les points A, B, c du plan tels que AB = 5, AC = 8 et $B\hat{A}C = \frac{\pi}{6}$.

$\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est le vecteur $\vec{AE}$ orthogonal à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ tel que ($\vec{AB}$; $\vec{AC}$; $\vec{AE}$) est une base directe et || $\vec{AE}$ || = AB x AC x sin $\frac{\pi}{6}$ = 20

4.2 Propriétés

• L'aire d'un triangle ABC est :

A = $\frac{1}{2}\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

• L'aire d'un parallélogramme ABCD est :

A = $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$

• Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ $\vec{v} \wedge \vec{u}$ = - $\vec{u} \wedge \vec{v}$

• Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si leur produit vectoriel est nul

Expression analytique

Dans une base orthonormée, soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs définies par leur coordonnées :

$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ a pour composantes $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$ soit $\vec{u} \wedge v \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

Exemple

Le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ est le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}\begin{pmatrix} -13 \\ 8 \\ -22 \end{pmatrix}$ car :

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -13 \quad ; \quad \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -22$$

Règle pratique

On écrit les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ en colonnes en écrivant à nouveau x et x' puis y et y' sous z et z'. Les trois coordonnées sont les trois déterminants encadrés.