Branches infinies

1. Branches infinies

La courbe représentative d'une fonction f admet une branche infinie si l'une des coordonnées d'un point M(x,y) de cette courbe peut tendre vers l'infini. C'est-à-dire si on a l'un des cas suivants :

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} f(x) = l \ , \ \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \ \ et \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

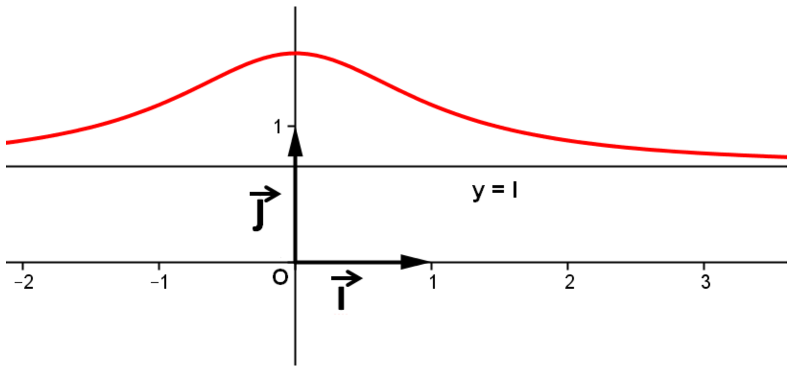
2. Asymptotes

2.1 Définition

Une droite (D) est une asymptote à la courbe (C) si la distance d'un point M(x ;y) de la courbe à la droite D tend vers 0 quand M s'éloigne indéfiniment sur la branche infinie.

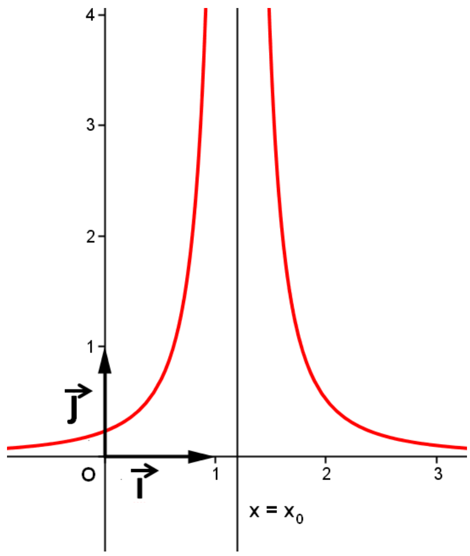
2.2 Asymptote horizontale (parallèle à l'axe des abscisses):

Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ alors la droite d'équation y = l est une asymptote horizontale



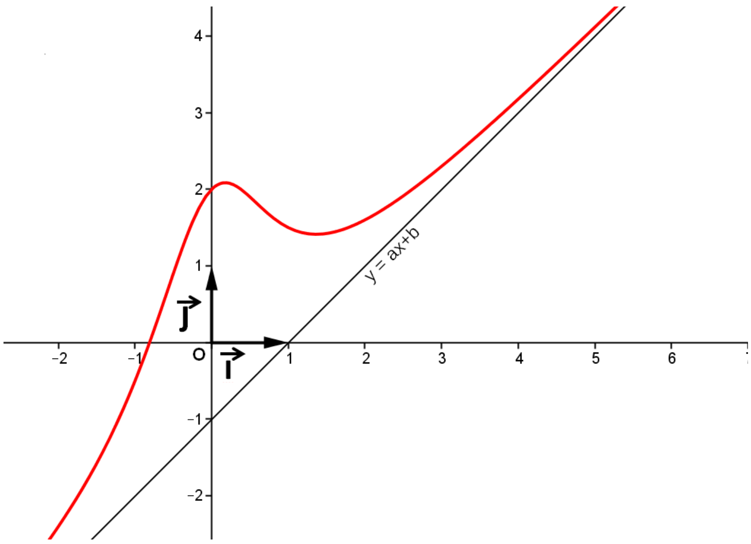
2.3 Asymptote verticale (parallèle à l'axe des ordonnées):

Si $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$, alors la droite d' équation x = x_0 est une asymptote verticale à la courbe représentative de f



2.4 Asymptote oblique :

La courbe C_f admet une asymptote oblique si $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et s'il existe deux réels a et b tels que $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$; l'équation de l'asymptote est alors y =ax + b.



Détermination de a et b

Si f est une fonction telle que $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ et s'il existe deux réels a et b tel que $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ alors $\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x) - (ax+b)}{x} \right] = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - a = 0$,

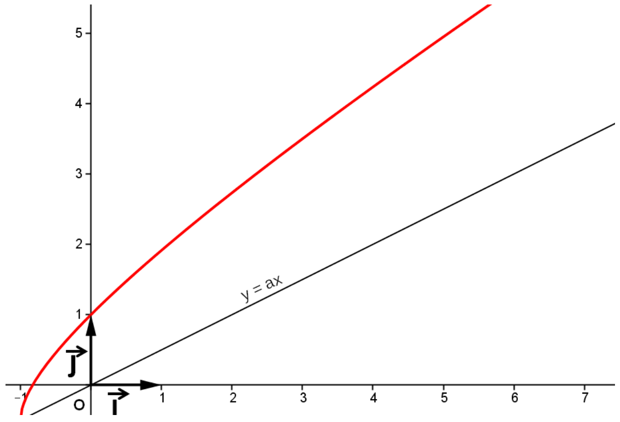
Donc, $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ lorsque cette limite existe.

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$ donc $\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = b$ si cette limite existe.

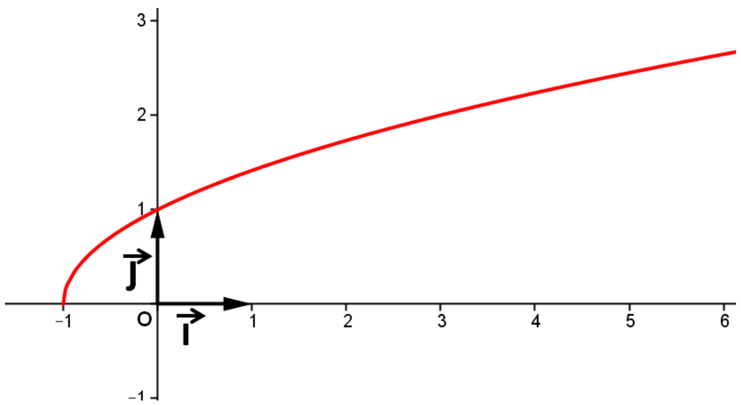
Remarques

- Si f(x) est de la forme $f(x) = \alpha x + b + \varphi(x)$ ou φ est telle que $\lim_{x \to \infty} \varphi(x) = 0$, alors la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote à la courbe.

- Si $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$ mais $\lim_{x \to \infty} [f(x) - ax] = \infty$, la courbe n'admet pas d'asymptote. Elle admet **une branche infinie parabolique de direction asymptotique y = ax.**



- Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ mais $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$ la courbe n'admet pas d'asymptote mais **une branche infinie parabolique de direction asymptotique l'axe des abscisses.**



- Si $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\infty$, la courbe n'admet pas d'asymptote mais **une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.**