CORRECTION BACC 2006

Exercice 1

Soit P le polynôme de ∀ défini par :

$P(z) = z^3 - iz^2 + (1-i)z - 2 + 2i.$

1-Calcule de P (1) et P(2i).

$P(1) = 1^3-i1^2+(1-i)(1)-2+2i$

$=1-i+1-i-2+2i$

$= 0$

$\boxed{P(1) = 0}$

$P(2i)=(2i)^3-i(2i)^2+(1-i)(2i)-2+2i$

$=-8i-i(-4)+2i+2-2+2i$

$=-8i+4i+2i+2-2+2i$

$= 0$

$\boxed{P(2i) = 0}$

2-a)Détermination de nombre complexe b tel que :

$P(z) = (z + b) [z^2 - (1 + 2i) z + 2i].$

Développons l'équation

$P(z)=z^3-(1+2i)z^2+2iz+bz^2-(1+2i)bz^2+2ib$

$P(z)=z^3+[b-(1.2i)]z^2+[2i-(1+2i)]z+2bi$

Par identification

$$\begin{cases} b-(1+2i)=-i & (1) \\ 2i-(1+2i)b=1-i & (2) \\ 2bi=-2+2i & (3) \end{cases}$$

(1) $b-(1+2i)= -i$

$b=-i+1+2i$

$b=1+i$

(2) $2i-(1+2i)b=1-i$

$-(1+2i)b=1-i-2i$

$-(1+2i)b=1-3i$

$(1+2i)b=-1+3i$

$$b=\frac{-1+3i}{1+2i}=\frac{(-1+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$$

$$b=\frac{-1+2i+3i+6}{1+4}=\frac{5+5i}{5}=1+i$$

$b=1+i$

(3) $2ib=-2+2i$

$$b=\frac{-2+2i}{2i}=\frac{(-2+2i)(i)}{2i(i)}=\frac{-2i-2}{-2}=1+i$$

$\boxed{b=1+i}$

$\boxed{P(z)=(z+1+i)[z^2-(1+2i)z+2i]}$

b) <u>Déduction de solution l'équation P(z) = 0</u>.

$(z+1+i)[z^2-(1+2i)z+2i]=0$

$z+1+i=0$ ou $z^2-(1+2i)z+2i=0$

$z=-1-i$ ou $z^2-(1+2i)z+2i=0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$=(1+2i)^2-4(1)(2i)$

$=1+4i-4-8i$

$\Delta = -3-4i$

On calcul les racines de Δ

Soit z = x+iy racine de Δ

$\Delta = z^2$

$$\begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ 2xy=-4 \\ x^2+y^2=|\Delta|=5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \\ \hline 2x^2=2 \\ x^2=1 \\ x=\pm 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - \begin{cases} x^2-y^2=-3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \\ \hline 2y^2=8 \\ y^2=4 \\ y=\pm 2 \end{array}$$

xy négatif veut dire que x et y de signe contraire donc les 2 racines de Δ

$\sqrt{\Delta} = -1+2i$

et

$\sqrt{\Delta} = 1-2i$

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+2i-1+2i}{2} = 2i$$

$$z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+2i+1-2i}{2} = 1$$

La Solution de P(z) = 0 est

$\boxed{S=\{1, 2i, -1-i\}}$

3)<u>a)Détermination d'affixe z_D du point D tel que :</u> $\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$

$Z_A = 1$ $Z_B = 2i$ $Z_C = -2+i$ $Z_D = ?$

$\vec{DA} - \vec{DB} + \vec{DC} = \vec{0}$

$Z_A - Z_D - (Z_B - Z_D) + (Z_C - Z_D) = 0$ $Z_A - Z_D - Z_B + Z_D + Z_C - Z_D = 0$

$Z_A - Z_B + Z_C - Z_D = 0$

$\boxed{Z_D = Z_A - Z_B + Z_C}$

<u>AN</u> : $Z_D = 1-2i-2+i = -1-i$

$\boxed{Z_D = -1-i}$

Vérification de (ABCD) soit un parallélogramme.

On démontre que $\begin{cases} AB=DC \\ BC=AD \end{cases}$

AB=BC ?

$z_B - z_A = 2i - 1$

$z_C - z_D = -2 + i + 1 + i = -1 + 2i$

||AB||= $\sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

||BC||= $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

BC=AD

$z_c - z_b = -2 + i - 2i = -2 - i$

$z_d - z_a = -1 - i - 1 = -2 - i$

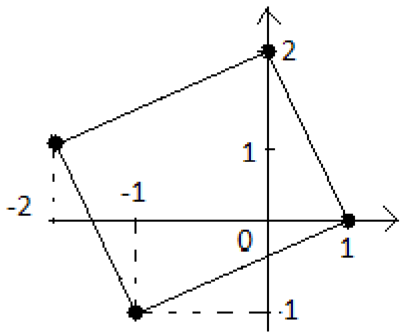
||BC||= $\sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

||AD||= $\sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

Conclusion: AB=BC=DC=AD= $\sqrt{5}$

(ABCD) est un carré

b) Traçage de A, B, C et D.



c) Détermination de l'angle ($\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$).

Mesure $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

On calcul

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1 - i - 1}{2i - 1} = \frac{-2 - i}{2i - 1}$$

$$\frac{(-2-i)(2i+1)}{(2i-1)(2i+1)} = \frac{-4i - 2 + 2 - i}{-4 - 1} = \frac{-5i}{-5} = i \quad \boxed{més(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}}$$

La nature du quadrilatère ABCD est Carre

Exercice 2

- 20 tiges de forme identique.
-20% des tiges sont défectueuses

1 -Calcul du nombre des tiges défectueuses.

N= $\frac{20}{100}*20=4$

Il y a 4 nombres des tiges défectueuses

2 –On prend au hasard, une à une, 3 tiges qu'il essaie d'allumer, au fur et à mesure.

Calculons la probabilité événements suivants :

Cas possible : Card $\Omega = A_{20}^{3} = 6840$

$$Card\Omega = 6840$$

A : ''Aucune des tiges ne s'est enflammée''.

A $\{0\overline{F}et3F\}$

$cardA = A_{4}^{0} * A_{16}^{3} = 3360$

$$P(A) = \frac{3360}{6840} = \frac{28}{57}$$

$$\boxed{P(A) = \frac{28}{57}}$$

B :''La 2e tige seulement s'est enflammée''.

B :$\{2\overline{F}et1F\}$

$Card(B) = A_{4}^{2} * A_{16}^{1} = 192$

$$P(B) = \frac{192}{6840} = \frac{8}{285}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{8}{285}}$$

C : ''L'une des 3 tiges ne s'est pas enflammée''.

C :$\{1\overline{F}et2F\}$

$Card(C) = A_{4}^{1} * A_{16}^{2} = 960$

$$P(C) = \frac{960}{6840} = \frac{8}{57}$$

$$\boxed{P(C) = \frac{8}{57}}$$

D : ''L'une au moins des 3 tiges s'est enflammée''.

D :$\{1Fou2Fou3F\}$

D :$\{1Fet2\overline{F}ou2Fet1\overline{F}ou3Fet0\overline{F}\}$

$Card(D) = A_{16}^{1} * A_{4}^{2} + A_{16}^{2} * A_{4}^{1} + A_{16}^{3} * A_{4}^{0} = 4512$

$$P(D) = \frac{4512}{6840} = \frac{188}{285}$$

$$\boxed{P(D) = \frac{188}{285}}$$

PROBLEME

Les deux parties A et B sont indépendantes.

PARTIE A

$f(x) = x^2 (1 - \ln x) \quad x > 0$

1-a) Calculons la limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 (1 - \ln x) = (+\infty)(-\infty)$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty}$$

a) Vérification que $x^2 \ln x = \dfrac{x^2 \ln x^2}{2}$

Propriété de

$\ln a^n = n \ln a$

$$\frac{x^2 \ln x^2}{2} = \frac{x^2 2 \ln x}{2} = x^2 \ln x$$

$$\boxed{x^2 \ln x}$$

c) Déduction de la continuité de f en 0

f est continu en x=0 si $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \exists$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 (1 - \ln x) = 0(+\infty) FI$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left[x^2 - x^2 \ln x \right] = \lim_{x \to 0^+} x^2 - \lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x^2 - x^2 \ln x = 0$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \ln x^2 2}{2} = 0 \quad donc \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$\boxed{\text{f est continu en x=0}}$

Dérivabilité

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 (1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \to 0} (x - x \ln x) = 0$$

f est dérivable en 0

2 a) Détermination la dérivée f ' de f

$f(x) = x^2(1-\ln x)$ $\quad U*V = U'V + V'U$

$U=x^2 \quad U'=2x$

$V=1-\ln x \quad V'=-\frac{1}{x}$

$f'(x) = U'V + V'U$

$f'(x) = 2x(1-\ln x) + (-\frac{1}{x})(x^2)$

$= 2x - 2x\ln x - \frac{x^2}{x} = 2x - 2x\ln x - x = x - 2x\ln x$

$\boxed{f'(x) = x(1-2\ln x)}$

b) Etude de variations de f et son tableau

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(1-2\ln x) = 0$

$x = 0$ Ou $1-2\ln x = 0$

$f'(x) \rangle 0$ Si $x \rangle 0$ ou $1-2\ln x > 0$

$-2\ln x > -1$

$2\ln x < 1$

$\ln x^2 < 1$

$\ln x^2 < \ln e$

$x < \pm\sqrt{e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	0	↗	$\frac{e}{2}$	↘	∞

$f\left(\sqrt{e}\right) = f\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(1-\ln e\tfrac{1}{2}\right) = e(1-\tfrac{1}{2}) = \frac{e}{2}$

3a) Détermination les coordonnées du point A intersection de (C) avec l'axe des abscisses (A ≠ O)

$y = 0 \Leftrightarrow x^2(1-\ln x) = 0$

$x = 0$ ou $1-\ln x = 0$

$-\ln x = -1$

$\ln x = 1$

$e^{\ln x} = e^1$

$x = e$

$\boxed{\text{A(e,0)} \quad \text{ou} \quad 0(0,0)}$

Equation de la tangente (T)

$$\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$$

$$f'(x_0) = f'(x) = x(1 - 2\ln x)$$

$$f'(x_0) = f'(e) = e(1 - \ln e)$$

$$= e(1-2) = -e$$

$$f'(x_0) = -e$$

$$f(x_0) = f(e) = e^2(1 - \ln e) = e^2(1-1) = 0$$

$$f(x_0) = f(e) = 0$$

$$y = -e(x - e) + 0$$

$$\boxed{y = -e(x - e)}$$

b-Branche infinie

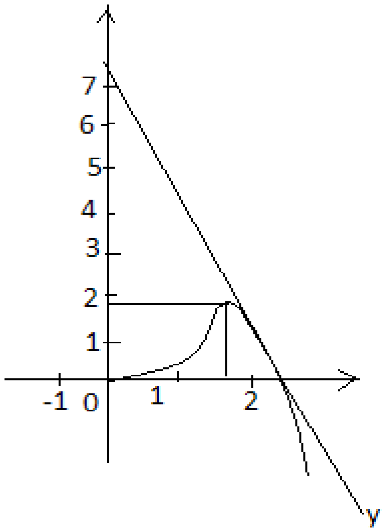
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2(1 - \ln x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x(1 - \ln x) = (+\infty)(-\infty)$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty}$$

Donc la courbe (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique l'axe y'oy

c) courbe (C)



PARTIE B

Soit $(U_n)_{n \in IN}$ la suite de nombres réels strictement positifs définie par $U_O = e$ et $U_{n+1} = \sqrt{\frac{U_n}{e}}$ pour $n \in IN$.

1 - On pose $V_n = \frac{1+\ln U_n}{2}$

Calculons U_1

Pour n=0

$$U_{0+1} = U_1 = \frac{\sqrt{U_0}}{e} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{e}}{e} = 1$$

$$\boxed{U_0 = 1}$$

Calcul de V_0

Pour n=0

$$V_0 = \frac{1+\ln U_0}{2} \Leftrightarrow \frac{1+\ln e}{2}$$

$$= \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\boxed{V_0 = 1}$$

Calcul de V_1

Pour n=1

$$V_1 = \frac{1+\ln U_1}{2} \Leftrightarrow \frac{1+\ln 1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{V_1 = \frac{1}{2}}$$

2 Démonstration de la suite géométrique

Un est une suite géométrique si $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$

Calcul de V_{n+1}

$$V_{n+1} = \frac{1+\ln U_{n+1}}{2}$$

$$= \frac{1+\ln(\frac{U_n}{e})^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}\ln(\frac{U_n}{e})}{2}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}\ln U_n - \frac{1}{2}\ln e}{2} = \frac{1+\frac{1}{2}\ln U_n - \frac{1}{2}}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln U_n}{2} = \frac{1+\ln U_n}{4}$$

$$V_{n+1} = \frac{1+\ln U_n}{4}$$

Calcul de $\frac{V_{n+1}}{V_n}$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{1+\ln U_n}{4}}{\frac{1+\ln U_n}{2}} = \frac{1+\ln U_n}{4} * \frac{2}{1+\ln U_n} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{2} = q$$

(Vn) est une Suite Géométrique de raison q= $\frac{1}{2}$ et de premier terme V_0 =1

$$V_0 = \frac{1+\ln U_0}{2} = \frac{1+\ln e}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad V_0 = 1$$

3 - L'expression de V_n en fonction de n

$$\boxed{V_n = q^n V_0}$$

$$V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{V_n = \frac{1}{2^n}}$$

Déduction de U_n

$$V_n = \frac{1+\ln U_n}{2}$$

$$2V_n = 1+\ln U_n \quad \Leftrightarrow 2V_n - 1 = \ln U_n$$

$$\ln U_n = 2V_n - 1$$

$$e^{\ln U_n} = e^{2V_n - 1}$$

$$\boxed{U_n = e^{2V_n - 1}}$$

Calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n$

$$U_n = e^{2\left(\frac{1}{2^n}\right)-1} = e^{\frac{2}{2^n}-1} \qquad \boxed{U_n = e^{\frac{2}{2^n}-1}}$$

Déduction $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(e^{\frac{2}{2n}-1}\right) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} U_n = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$