Séquence 3 : Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues

1. Équation à deux inconnues

Une **équation linéaire à deux inconnues** est une équation de la forme ax+by=c où a, b et c sont des réels.

Résoudre dans IR² une telle équation, c'est chercher tous les couples (x ; y) vérifiant cette égalité.

Une telle équation admet une infinité de solutions.

Exemple : 2x - 3y = -1.

$(1;1)$, $\left(0;\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ … sont des solutions de cette équation.

Deux équations sont dites **équivalentes** si elles ont les mêmes solutions.

On obtient une équation équivalente à celle-ci en multipliant, en divisant ou en ajoutant les deux membres de l'inégalité par un même nombre non nul.

2. Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

C'est un système de la forme $\begin{cases} ax+bx=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.

Résoudre un tel système c'est chercher tous les couples (x ; y) vérifiant à la fois les deux équations.

Deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils possèdent les mêmes solutions.

Méthodes de résolution :

Résoudre le système $\begin{cases} ax+bx=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des réels.

2.1 Substitution

La méthode consiste à :

- Isoler une des inconnues dans l'une des équations, par exemple x (ce qui revient à exprimer x en fonction de l'autre inconnue y) dans la première équation ;
- Remplacer x par cette expression obtenue dans la deuxième équation ;
- On obtient alors une équation en y du premier degré que l'on peut résoudre facilement ;
- Remplacer y dans la première équation par sa valeur trouvée, puis résoudre cette équation en x.

Exemple : Résoudre le système $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+2y=-1 \end{cases}$.

De la première équation, on a : $x=\frac{y+3}{2}$.

En remplaçant x par cette valeur dans la deuxième équation, on a $\frac{y+3}{2}+2y=-1$ ou, en mettant au même dénominateur, $\frac{y+3+4y}{2}=-1$. La résolution donne y = -1.

En remplaçant y dans la première équation, on trouve x = 1.

L'ensemble des solutions est donc S = { (1 ; -1) }.

2.2 Combinaison linéaire

La méthode consiste à :

- Multiplier les deux membres de la première équation par un nombre k et les deux membres de la deuxième équation par un nombre k' de manière à obtenir le même coefficient de x dans les deux équations. On obtient un système équivalent au premier ;
- Faire la soustraction membre à membre des deux équations. On obtient une équation à une seule inconnue (ici y) que l'on peut résoudre sans difficulté ;
- Refaire les mêmes opérations avec les coefficients de y, et on obtient une équation avec une seule inconnue (ici x).

Remarque :

On peut ne pas faire la troisième étape, mais seulement prendre la valeur de x trouvée dans la deuxième étape et la rapporter dans l'autre équation.

Exemple : Résoudre le système : (S) $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ x-2y=3 \end{cases}$.

On multiplie la deuxième équation par 2, on obtient le système $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 2x-4y=6 \end{cases}$ équivalent à (S).

Par soustraction membre à membre, on a : 0.x + 7y = -7, ce qui donne y = -1.

De même, en multipliant la première équation par 2 et la deuxième par 3, on obtient le système

$\begin{cases} 4x+6y=-2 \\ 3x-6y=9 \end{cases}$ équivalent à (S).

Par addition membre à membre, on a : 7 x + 0. y = 7, ce donne x = 1.

L'ensemble des solutions est donc S={ (1 ; -1) }.

2.3 Déterminant

On utilise ici des résultats vus en géométrie pour résoudre le système $\begin{cases} ax+bx=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Chacune de ces équations est une équation d'une droite, soit (D) et (D').

On calcule les nombre suivants, appelés déterminants du systèmes : $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$,

$\Delta_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=cb'-c'b$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}=ac'-a'c$.

- Si $\Delta\neq 0$, on a une solution unique : $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ et $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.

Exemple :

Résolvons dans IR² le système : $\begin{cases} 3x+2y=31 \\ 11x+7y=112 \end{cases}$.

$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 7 \end{vmatrix}=3\times 7-11\times 2=-1$. $\Delta\neq 0$ donc on a un couple de solution unique (x ; y).

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 31 & 2 \\ 112 & 7 \end{vmatrix}=31\times 7-2\times 112=-7$ et $\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 31 \\ 11 & 112 \end{vmatrix}=3\times 112-31\times 11=5$

D'où x = 7, y = 5 et S = { (7 ; 5) }.

- Si $\Delta = 0$ et $\Delta_x = \Delta_y = 0$, alors les deux équations du système sont équivalentes. On résout une des deux équations, par exemple ax + by = c.

Pour résoudre dans IR² l'équation ax + by = c, avec $(a,b)\neq(0,0)$, on réorganise les termes de cette équation pour isoler y.

On obtient : $y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{c}{b}$. En posant x = λ, on a : $y=-\dfrac{a}{b}\lambda+\dfrac{c}{b}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est $S=\left\{\lambda;-\dfrac{a}{b}\lambda+\dfrac{c}{b},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$.

Comme on a une infinité de valeurs de λ, le système admet une infinité de solutions.

Exemple : Résolvons dans IR² le système : $\begin{cases} 3x-y=-1 \\ -6x+2y=2 \end{cases}$.

On a $\Delta = 0$ et $\Delta_x = \Delta_y = 0$. Les deux équations sont équivalentes.

On va résoudre la première équation: 3x - y = -1.

En posant x = λ, on a : y = 3 λ+1.

L'ensemble des solutions est $S=\{\lambda;3\lambda+1,\lambda\in\mathbb{R}\}$.

Si $\Delta = 0$ et $\Delta_x\neq 0$ ou $\Delta_y\neq 0$ alors le système est impossible et $S=\emptyset$.