

Séquence 2 : Inéquations du second degré dans IR

1. Signe de $ax+b$

Pourquoi est-il utile de connaître le signe de $ax+b$? Factoriser une expression, c'est en fait la transformer sous la forme d'un produit où n'apparaissent que des facteurs de degré moindre. Parmi ceux-ci, on retrouve les binômes de la forme $ax+b$.

Par exemple, la forme factorisée de x^2-4 est $(x-2)(x+2)$. Connaître les signes de $x-2$ et $x+2$ permet de connaître le signe de $(x-2)(x+2)$, d'où l'utilité de ce qui va suivre.

En utilisant les résultats de l'étude des fonctions affines en troisième, on a :

Si a est positif ($a>0$), c'est-à-dire a a un signe $+$, alors le tableau de signe du binôme $ax+b$ est :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	0	$+$

Si a est négatif ($a<0$), c'est-à-dire a a un signe $-$, alors le tableau de signe du binôme $ax+b$ est :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$+$	0	$-$

Exemples :

- Dresser le tableau de signe de $2x+5$.

$2x+5=0$, $2x=-5$, $x=-\frac{5}{2}$. On est dans le cas $a > 0$.

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$+\infty$
$2x+5$	$-$	0	$+$

Si $x = -5$, $2(-5) + 5 = -5$; et si $x = 3$, $2(3) + 5 = 11$. On voit que si x change, $2x+5$ change de signe.

- Dresser le tableau de signe de x^2-4 .

$x^2-4=0$, si $x = -2$ ou $x = 2$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-2)(x+2)$	$+$	0	$-$	$+$

2. Signe de $ax^2 + bx + c$

Pour étudier le signe de $ax^2 + bx + c$, on peut utiliser sa forme canonique ou utiliser le discriminant.

2.1 Utilisation de la forme canonique à partir d'exemples

Étudier, suivant les valeurs de x , le signe de chaque trinôme :

$$T_1(x) = 2x^2 + x + 1, T_2(x) = -4x^2 + 4x - 1 \text{ et } T_3(x) = -2x^2 + x + 3.$$

- Écrivons $T_1(x)$ sous forme canonique : $T_1(x) = 2[(x + \alpha)^2 + \beta]$ avec $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{T_1(-\alpha)}{a}$,

Après calcul, on trouve : $T_1(x) = 2[(x + \frac{1}{4})^2 + \frac{7}{16}]$. C'est une expression positive car $(x + \frac{1}{4})^2 > 0$ pour toutes valeurs de x et la somme de deux nombres positives est positive.

Ainsi, pour tout réel x , $T_1(x) > 0$.

- Écrivons $T_2(x)$ sous forme canonique : $T_2(x) = -4[(x + \alpha)^2 + \beta]$ avec $\alpha = \frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{T_2(-\alpha)}{a}$.

Après calcul, on trouve $T_2(x) = -4(x - \frac{1}{2})^2$ et $S =]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$

- Écrivons $T_3(x)$ sous forme canonique :

$$T_3(x) = -2[x^2 - \frac{x}{2}] = -2[(x - \frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 - \frac{3}{2}] = -2[(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{25}{16}]$$

On peut factoriser $T_3(x)$: après calcul $T_3(x) = -2(x+1)(x - \frac{3}{2})$ et on peut dresser son tableau de signe :

x	$-\infty$	-1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
-2	-	-	-	-	
$x+1$	-	0	+	+	
$x - \frac{3}{2}$	-	-	0	+	
$T_3(x)$	-	0	+	0	-

2.2 Utilisation du discriminant

Soit $T(x) = ax^2 + bx + c$. La forme canonique de $T(x)$ est $T(x) = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}]$.

Si on pose $\Delta = b^2 - 4ac$, on a trois cas à envisager.

- $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser $T(x)$, $T(x)$ a le même signe que a ;
- $\Delta = 0$, $T(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right]$, $T(x)$ a même signe que (a) ;
- $\Delta > 0$, on calcule les racines x' et x'' (solutions de $T(x) = 0$).
- $T(x) = a (x-x') (x-x'')$ et $T(x)$ a le même signe que a à l'extérieur de x' et x'' , et du signe contraire à a entre x' et x'' .

Pour dresser le tableau de signe de ax^2+bx+c , on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$:

- $\Delta < 0$, on ne peut pas factoriser $T(x)$, $T(x)$ a même signe que a . On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
T(x)	Signe de (a)	

- $\Delta = 0$, $T(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right]$ $T(x)$ a même signe que a . On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
T(x)	Signe de (a)	0	Signe de (a)

- $\Delta > 0$, on calcule $x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

$T(x) = a (x - x') (x - x'')$ et on a le tableau de signe suivant (on suppose $x' < x''$) :

x	$-\infty$	x'	x''	$+\infty$	
T(x)	Signe de (a)	0	Signe de (-a)	0	Signe de (a)

3. Inéquation du second degré dans IR

3.1 Définition

Une « inéquation du second degré à une inconnue » est une inéquation qui peut se mettre sous l'une des quatre formes suivantes :

- $ax^2 + bx + c > 0$;
- $ax^2 + bx + c \geq 0$;
- $ax^2 + bx + c < 0$ ou
- $ax^2 + bx + c \leq 0$

avec $a \neq 0$

3.2 Résolution

Pour résoudre une telle inéquation :

- On dresse le tableau de signe de $ax^2 + bx + c$
- On hachure les colonnes avec les signes inutiles
- On écrit l'ensemble des solutions sous forme de réunion d'intervalles

Exemples :

Résoudre dans IR les inéquations suivantes :

a) $-2x^2 - x + 10 > 0$

b) $4x^2 + 28x + 49 > 0$

c) $3x^2 - 2x + 5 > 0$

Réponses :

a) Résolution de $-2x^2 - x + 10 > 0$

Dressons le tableau de signe de $T(x) = -2x^2 - x + 10$. Ici, $a = -2$, $b = -1$ et $c = 10$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(-2) \times 10 = 81 = 9^2$$

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2(-2)} = 2 \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{81}}{2(-2)} = -\frac{5}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	2	$+\infty$	
T(x)	-	0	+	0	-

L'ensemble des solutions est : $S =]-\frac{5}{2}; 2[$.

b) Résolution de $4x^2 + 28x + 49 > 0$

Ici, $a = 4$, $b = 28$ et $c = 49$. Après calcul, on trouve $\Delta = 0$.

$T(x) = (2x + 7)^2 = 2(x + \frac{7}{2})^2$. T(x) a même signe que a qui est positif :

$$S =]-\infty; -\frac{7}{2}[\cup]-\frac{7}{2}; +\infty[$$

c) Résolution de $3x^2 - 2x + 5 > 0$

Après calcul, on trouve $\Delta = -56$. $\Delta < 0$. T(x) est du signe de a qui est positif :

$$S =]-\infty; +\infty[$$