Suites numériques réelles : série n°2

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{n \cdot u_n + 3}{n+1} \quad \text{pout tout } n \geq 1 \end{cases}$, et (v_n) telle que $v_n = n \cdot u_n$ pour tout $n \geq 1$

1°) a) Calculer u_1, u_2 et u_3

b) Calculer v_1, v_2 et v_3

2°) a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n

b) Calculer $v_{n+1} - v_n$. Que dire de la suite (v_n) ?

c) Donner alors l'expression explicite de v_n

3°) a) Calculer la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_{20}$

b) Pour quelle valeur de p, $v_p = 92$?

c) Calculer alors la somme $v_1 + v_2 + \cdots + v_p$

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3u_n + 1} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et u_2

2°) Soit (v_n) telle que $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in IN$

a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison r

b) Donner l'expression explicite de v_n. En déduire celle de u_n.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{n \cdot u_n}{n+1} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$, et la suite (v_n) définie par $v_n = n(u_n - 1)$ pour tout $n > 0$.

1°) Calculer u_2, u_3 et u_4.

2°) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison r à déterminer.

3°) Donner l'expression explicite de v_n, puis celle de u_n.

4°) Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Interpréter

5°) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

On pose $v_n = u_n - 2$.

1°) Calculer u_1, v_0 et v_1.

2°) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q

3°) a) Expliciter v_n et calculer sa limite.

b) Expliciter u_n et calculer sa limite.

4°) a) Exprimer la somme $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

b) En déduire l'expression de $S'_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4}{4 - u_n} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et u_2

2°) Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique dont on déterminera sa raison et son premier terme.

3°) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

4°) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} \cdot u_n \quad \text{pour tout } n > 0 \end{cases}$

1°) Calculer u_2, u_3 et u_4

2°) Soit (v_n) la suite numérique définie pour tout $n > 0$ par $v_n = \dfrac{u_n}{n}$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme v_1. Donner alors l'expression explicite de v_n

b) En déduire l'expression explicite de u_n. Calculer u_2, u_3, u_4, u_{50}

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 3u_{n+1} = u_n - 1 & \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2u_n + 1$

1°) Calculer u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2.2°)

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n

b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique, préciser sa raison

c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

d) Déterminer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n

En déduire $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4} & \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n)

2°) On considère la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{u_n + 3}{u_n - 4}$ pour tout $n \in IN$

a) Calculer v_0, v_1 et v_2

b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?

c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

d) Calculer $v_{n+1} - v_n$. En déduire le sens de variation de la suite (v_n)

3°) Calculer les limites de (u_n) et (v_n)

4°) Calculer $S_n = v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + a & \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$, où $a \in IR$

1°) Sachant que $u_2 = \dfrac{5}{4}$, calculer a

2°) Dans cette question, on prend $a = \dfrac{1}{2}$. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 1$ pour tout $n \in IN$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme.

b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n

c) Calculer la limite de v_n et celle de u_n

3°) Exprimer les sommes suivantes en fonction de n :

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$

Exercice 10

Soit (u_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{5}{6} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3

2°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 3u_n + 5$ pour tout $n \in IN$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser la raison q et le premier terme v_0

b) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 11

On considère la suite géométrique définie de la façon suivante : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n$, pour tout $n \geq 0$

1°) Calculer u_2, u_3 et u_4

2°) Exprimer u_n en fonction de n, pour tout $n \geq 1$.

Calculer une valeur approchée de u_{64}.

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer u_1, u_2 et u_3

2°) a) Montrer que si $0 \leq u_n \leq 1$, alors $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

b) Que peut-on dire de u_n pour tout $n \in IN$?

Exercice 13

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Ni l'un ni l'autre ?

2°) Démontrer que, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $0 \leq u_n \leq 3$

3°) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in IN$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$

a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

b) Exprimer v_n en fonction de n

c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis de n. Que vaut u_{10} ?

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 5u_n \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) Calculer u_2, u_3 et u_4

2°) a) Montrer que le terme général u_n est de la forme $u_n = A \times 5^n + B$, ($A, B \in IR$)

b) Déterminer A et B puis recalculer u_2, u_3, u_4 et u_{10}.

Exercice 15

Soit la suite (u_n) telle que : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \quad \text{pour tout } n \in IN \end{cases}$

1°) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $u_n > 0$

b) Montrer que si $u_n \le 2$, alors $u_{n+1} \le 2$. Que dire de la suite (u_n) ?

2°) a) Remarquer que $u_{n+1} + u_n > 0$ pour tout $n \in IN$, et que $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)$

b) Etudier alors dans $[0;2]$ le signe de $u_{n+1} - u_n$

c) Quelle est la variation de (u_n) ?

3°) En déduire qu'elle est convergente et donner sa limite