Trigonométrie : série n°1

Exercice 1 :

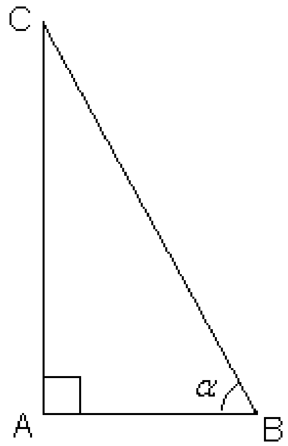
Dans le triangle ABC, rectangle en A, on note $\alpha = \widehat{ABC}$ et on définit :

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{BC} \quad ,$$

$$\sin(\alpha) = \frac{AC}{BC} ,$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{\quad}{\quad} ,$$

$$\cot an(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\quad}{\quad}$$



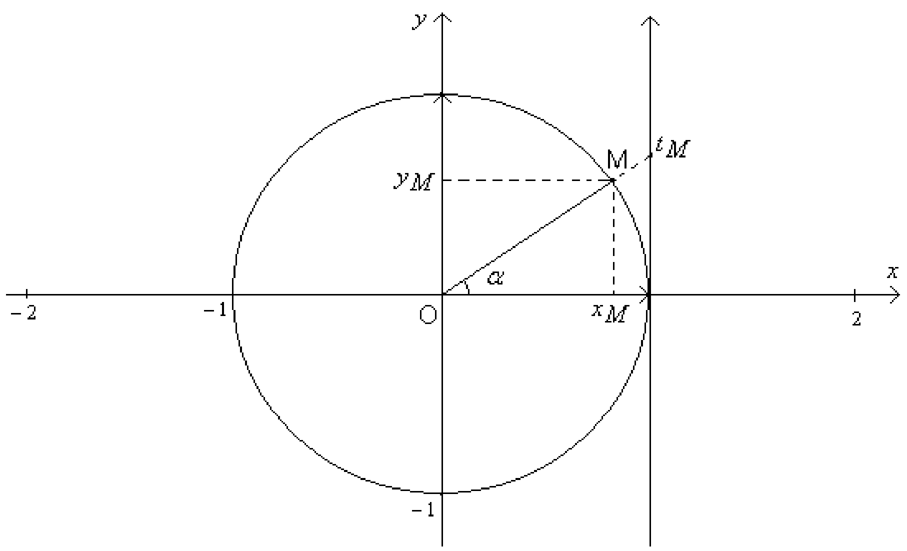
1°) <u>Première propriété :</u> Montrer que cos ² α + sin ² α = 1

2°) Soit (C), dans le repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$, le cercle de centre O et de rayon 1 ; et $M(x_M , y_M)$, un point de (C) (Voir figure ci-dessous)

On note $\alpha = \left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$

a) Vérifier que $\cos(\alpha) = x_M$, $\sin(\alpha) = y_M$ et $\tan(\alpha) = t_M$

b) Redémontrer la propriété dans 1°)



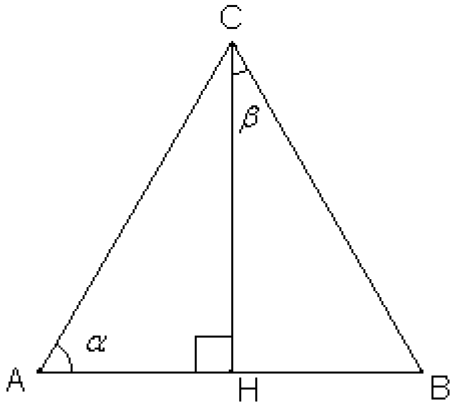
Exercice 2

L'unité de mesure pour les angles est le radian (rad).

$\pi\ rad$ est la mesure principale de l'angle plat.

$\dfrac{\pi}{2}\ rad$ est la mesure principale de l'angle droit.

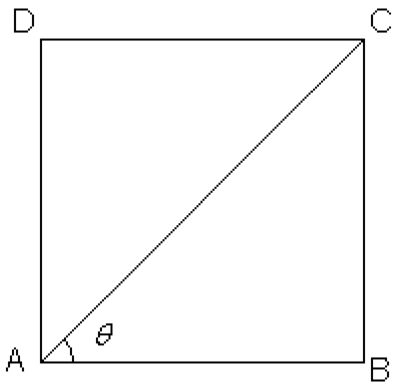
1°) ABC est un triangle équilatéral de côté 1, on note H la projeté orthogonal du point C sur le segment $[AB]$



a) Donner la mesure principale de chacun des angles $\alpha = \widehat{CAH}$ et $\beta = \widehat{BCH}$

b) Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

2°) $ABCD$ est un carré de côté 1

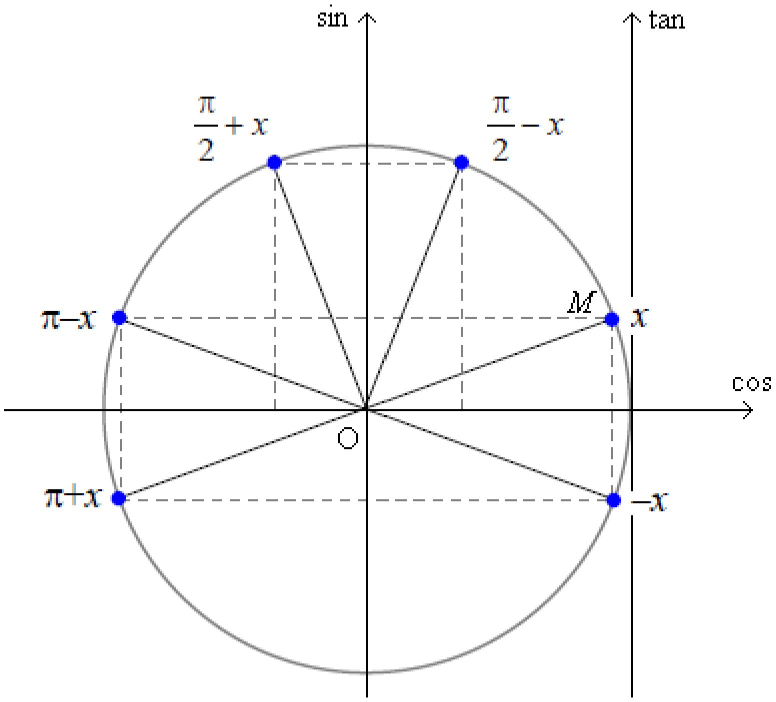


a) Donner la mesure principale de l'angle $\theta = \widehat{CAB}$

b) Calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$

Exercice 3

1°) Soit M un point du cercle trigonométrique (C), et notons x la mesure principale de l'angle $\alpha = \left(\vec{i}, \overrightarrow{OM}\right)$



Exprimer en fonction de $\cos(x)$, $\sin(x)$ ou $\tan(x)$ chacune des expressions suivantes :

$\cos(-x)$ et $\sin(-x)$

$\cos(\frac{\pi}{2}+x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}+x)$

$\cos(\frac{\pi}{2}-x)$ et $\sin(\frac{\pi}{2}-x)$

$\cos(\pi-x)$ et $\sin(\pi-x)$

$\cos(x+\pi)$ et $\sin(x+\pi)$

$\cos(x+2\pi)$ et $\sin(x+2\pi)$

$\cos(x+8\pi)$ et $\sin(x+4\pi)$

$\cos(x+5\pi)$ et $\sin(x+11\pi)$

$\cos(x+2k\pi)$ et $\sin(x+2k\pi)$ $(k \in Z)$

$\cos(x+(2k+1)\pi)$ et $\sin(x+(2k+1)\pi)$ $(k \in Z)$

$\tan(-x)$

$\tan(x+\pi)$

$\tan(x+k\pi)$ $(k \in Z)$

2°) Discuter suivant les valeurs de $k \in Z$ la valeur exacte de chacune des expressions suivantes :

$\cos(k\pi)$; $\sin(k\pi)$; $\cos(k\frac{\pi}{2})$; $\sin(k\frac{\pi}{2})$

Exercice 4 :

1°) Reproduire le cercle trigonométrique avec les principaux angles remarquables :

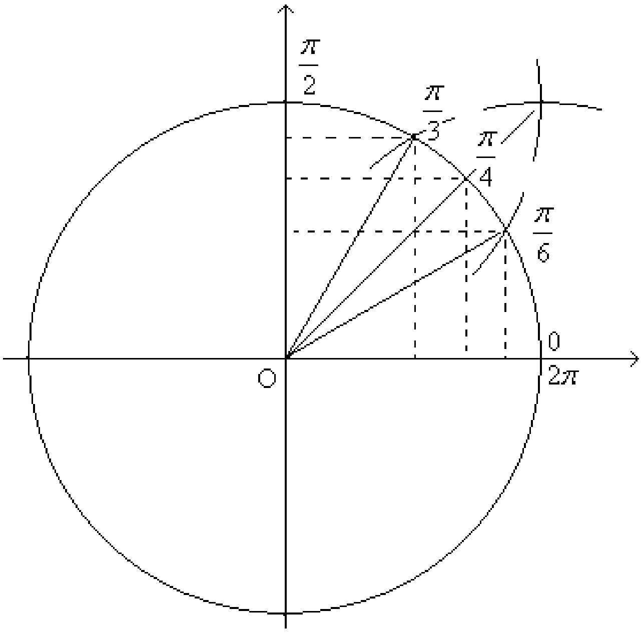
(les multiples de π dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{2}$ dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{4}$ dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{3}$ dans $[0;2\pi[$

les multiples de $\frac{\pi}{6}$ dans $[0;2\pi[$ …)



2°) Que vaut :

$\cos(\frac{\pi}{3})$	$\sin(\frac{\pi}{3})$	$\cos(\frac{\pi}{6})$	$\sin(\frac{\pi}{6})$
$\cos(\frac{\pi}{4})$	$\sin(\frac{\pi}{4})$	$\cos(0)$	$\sin(0)$
$\cos(\frac{\pi}{2})$	$\sin(\frac{\pi}{2})$	$\cos(\frac{2\pi}{3})$	$\sin(\frac{2\pi}{3})$
$\cos(\frac{5\pi}{6})$	$\sin(\frac{5\pi}{6})$	$\cos(\pi)$	$\sin(\pi)$
$\cos(\frac{5\pi}{4})$	$\sin(\frac{5\pi}{4})$	$\cos(\frac{3\pi}{2})$	$\sin(\frac{3\pi}{2})$
$\cos(\frac{5\pi}{3})$	$\sin(\frac{7\pi}{4})$	$\cos(\frac{11\pi}{6})$	$\sin(\frac{11\pi}{6})$
$\cos(-\frac{\pi}{4})$	$\sin(-\frac{\pi}{2})$	$\cos(-\frac{3\pi}{2})$	$\sin(-\frac{2\pi}{3})$

$\cos(-\frac{7\pi}{4})$ $\sin(-\frac{3\pi}{4})$ $\cos(2\pi)$ $\sin(2\pi)$

$\cos(\frac{7\pi}{2})$ $\sin(\frac{11\pi}{4})$ $\cos(\frac{11\pi}{3})$ $\sin(\frac{-9\pi}{4})$

Exercice 5

Le but de cet exercice est de calculer $\cos\left(\frac{869\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{869\pi}{6}\right)$

1°) Trouver les deux entiers a et k tels que $\frac{869\pi}{6} = a\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $-\pi \leq a\frac{\pi}{6} \leq \pi$

($a\frac{\pi}{6}$ est appelée valeur principale de $\frac{869\pi}{6}$)

2°) Donner alors $\cos\left(\frac{869\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{869\pi}{6}\right)$

3°) Déterminer la valeur principale de chacun des angles suivants puis préciser, dans chaque cas, $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$

$\alpha = \frac{373\pi}{4}$; $\alpha = \frac{224\pi}{3}$; $\alpha = \frac{358\pi}{6}$; $-\frac{47\pi}{3}$

$\alpha = -\frac{93\pi}{4}$; $\alpha = \frac{222\pi}{6}$; $\alpha = -\frac{358\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{3}$