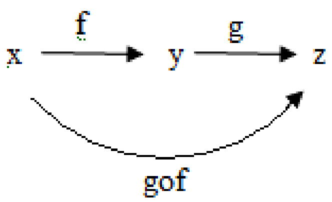
Transformations du plan : composée de deux transformations

1. Composées de transformations usuelles.

1.1 Rappels

Si f est une application de E vers F et g une application de F vers G, alors gof est l'application de E dans G qui, à tout élément x de E, associe l'élément z de G tel que gof(x) = g[f(x)]

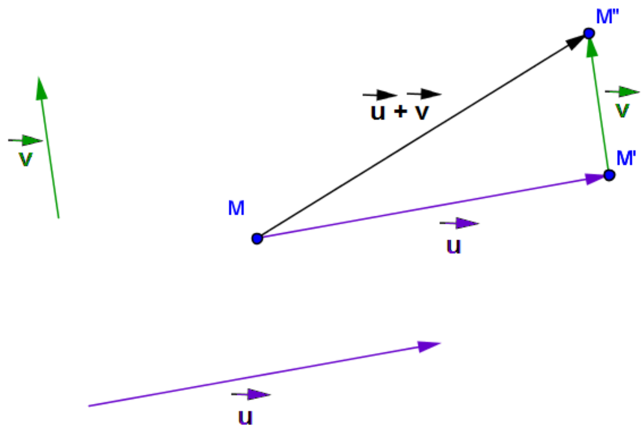


On associe d'abord à x son image y par f, puis à y son image z par g.

1.2 Composée de deux translations

Si $t_{\vec{u}_1}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u_1}$ et $t_{\vec{u}_2}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u_2}$. Alors la composée de $t_{\vec{u}_2}$ et $t_{\vec{u}_1}$ est la translation de vecteur $\vec{u}_2 + \vec{u}_1$

Donc $t_{\vec{u}_1} o t_{\vec{u}_2} = t_{\vec{u}_2 + \vec{u}_1}$



1.3 Composée de deux homothéties de même centre

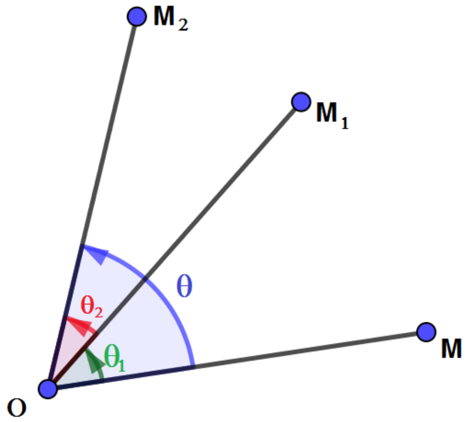
Une homothétie de centre O et rapport k se note en général h (O , k)

La composée d'une homothétie de centre O et rapport k_1 et d'une homothétie de centre O et de rapport k_2 est l'homothétie de centre O et de rapport $k = k_1.k_2$.

Ce qui s'écrit $h(O,k_1)oh(O,k_2) = h(O,k_1.k_2)$

1.4 Composée de deux rotations de même centre

Soit M_1 l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ_1 et M_2 l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle θ_2. On a



$$\begin{cases} OM_1 = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) = \Theta_1 \end{cases}$$

et $$\begin{cases} OM_2 = OM_1 \\ (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \Theta_2 \end{cases}$$

On a donc $$\begin{cases} OM_2 = OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \Theta_1 + \Theta_2 \end{cases}$$

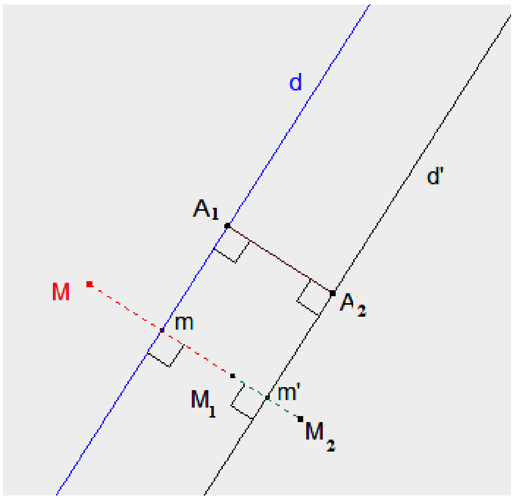
Théorème

La composée de deux rotations r_1 et r_2 de même centre O et d'angle respectifs θ_1 et θ_2 est la rotation de centre O et d'angle $\Theta = \theta_1 + \theta_2$

1.5 Composée de deux réflexions d'axes d et d'

Soient d et d' deux droites. On va noter s_d la réflexion d'axe d $s_{d'}$ la réflexion d'axe d'

- *Si d et d' sont parallèles :*



Notons M_1 l'image de M par S_d, et M_2 l'image de M_1 par $S_{d'}$. M_2 est donc l'image de M par la composée $S_{d'} o S_d$ de $S_{d'}$ et S_d.

Le point M_1, image de M par la réflexion d'axe d est tel que $\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{mM_1}$ et M_2, image de M_1 par la réflexion d'axe d' est tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1m'}$.

En utilisant la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$

m étant le milieu de $[MM_1]$ et m' le milieu de $[M_1M_2]$, on a $\overrightarrow{MM_2} = 2\,\overrightarrow{mM_1} + \overrightarrow{M_1m'}$

Or $\overrightarrow{mm'} = \overrightarrow{A_1A_2}$,D'où $\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{A_1A_2}$.

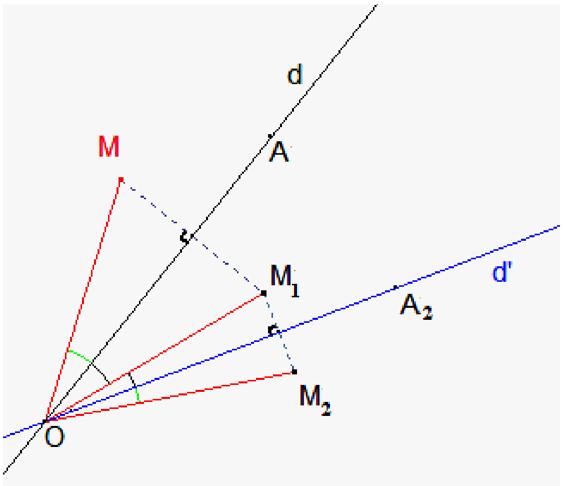
Théorème

La composée de deux réflexion d'axes d et d' parallèles est la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ où A_1 et A_2 sont respectivement des points de d et d' avec (A_1,A_2) perpendiculaire à d.

- *Si d et d' sont sécantes d'intersection O :*

Soient A_1 un point de d et A_2 un point de d'.

On reprend les notations précédentes :



Si M est en O, il en est de même de M_1 et de M_2.

Supposons M distinct de O.

On a OM = OM1 = OM2, et puisque (OA) est la médiatrice de [MM1], on a $(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OM_1})=(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA_1})$

De même, puisque (OA_2) est la médiatrice de [M1 M2], $(\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OM_2})=(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OA_2})$

Par la relation de Chasles pour les angles, on a

$$(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_2})=(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA_1})+(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OM_1})+(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OA_2})+(\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OM_2})$$

$$=2(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OM_1})+2(\overrightarrow{OM_1},\overrightarrow{OA_2})$$

$$=2(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2})$$

On a donc $\begin{cases} OM=OM_2 \\ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_2})=2(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2}) \end{cases}$

Théorème :

La composée de deux réflexion d'axes d et d' sécants en O est la rotation de centre O et d'angle $2(\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2})$ où A1 et A2 sont respectivement des points de d et d'.

1.6 Composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre

Soit r la rotation de centre O et d'angle Θ et h l'homothétie de centre O et de rapport k.

Si M_1 est l'image d'un point M par r et M_2 l'image de M_1 par h, on a : .

$$\begin{cases} OM=OM_1 \\ (\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_1})=\Theta \\ \overrightarrow{OM_2}=k\,\overrightarrow{OM_1} \end{cases}$$

Donc OM_2 = k.OM et $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM_2})=(\overrightarrow{OM},k\,\overrightarrow{OM_1})=\theta$

La composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre est appelée similitude plane directe. Le rapport de l'homothétie est le rapport de la similitude, l'angle de la rotation est l'angle de la similitude et le centre commun est le centre de la similitude.

Donc si on note S la similitude de centre O, de rapport k et d'angle Θ, et M' l'image de M par S, on a :

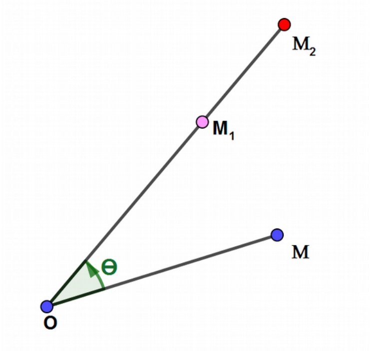
$$\begin{cases} OM' = k.OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \Theta \end{cases}$$

Plus généralement une similitude plane est la composée d'une homothétie de rapport positif et d'une isométrie.

Cette composition est commutative.

C'est une transformation qui multiplie les distances par un réel positif k, : il existe un réel k > 0, appelé rapport de la similitude, tel que si M et N sont deux points d'images respectives M' et N', alors M'N' = k.MN.

- Si la similitude conserve la mesure des angles orientés, on dit que c'est une similitude plane directe,
- Si la similitude transforme les angles orientés en leurs opposés, on dit que c'est une similitude plane indirecte.



2. APPLICATION RÉCIPROQUE

2.1 Rappel

Si f est une application de E vers F bijective, alors elle admet une

réciproque, notée f^{-1}, de F vers E, bijective, définie ainsi : si y= f(x) ,

alors $x = f^{-1}(y)$.

$f\circ f^{-1}(y) = y$ pour tout y de F et $f^{-1}\circ f(x) = x$ pour tout x de E

2.2 Réciproque d'une translation

Une translation de vecteur $\vec{u}$ associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$. Donc $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$.

Ainsi :

Théorème

La réciproque d'une translation de vecteur $\vec{u}$ est la translation de vecteur $-\vec{u}$

2.3 Réciproque d'une réflexion :

M' est l'image de M par la symétrie d'axe d si d est la médiatrice de [MM'].

Donc :

Théorème

La réciproque d'une réflexion d'axe d est cette réflexion même

2.4 Réciproque d'une homothétie

Une homothétie de centre O et de rapport k non nul associe à tout point M' tel que $\overrightarrow{OM}'=k\overrightarrow{OM}$. Donc $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{k}\overrightarrow{OM}'$.

Ainsi :

Théorème :

La réciproque d'une homothétie de centre O et de rapport k non nul est l'homothétie de même centre O, et de rapport $\frac{1}{k}$

2.5 Réciproque d'une rotation

Une rotation de centre O et d'angle θ associe à tout point M le point M' tel que OM' = OM et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM}')=\theta$, donc $(\overrightarrow{OM}', \overrightarrow{OM})=-\theta$

Théorème *:*

La réciproque d'une rotation de centre O et d'angle θ est la rotation de centre O et d'angle $-\theta$.

3. ISOMÉTRIES

Lorsqu'une transformation conserve les distances, on dit que c'est une isométrie.

Une transformation f est donc une isométrie si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, on a M'N' =MN.

Les translations, les symétries, les rotations et les homothéties de rapports 1 sont des isométries.

Une homothétie de rapport différent de 1 n'est pas une isométrie.

La composée de deux isométries est une isométrie.