Transformations du plan

1. Généralités

Une application f de E vers F est bijective si quel que soit y de F, il existe un et un seul élément x de E tel que f(x) = y.

Une transformation est une bijection du plan dans lui-même.

Les symétries, les homothéties de rapports non nuls, les rotations, et les translations sont des transformations du plan.

2. Les transformations usuelles

2.1 Réflexions (ou symétries orthogonales)

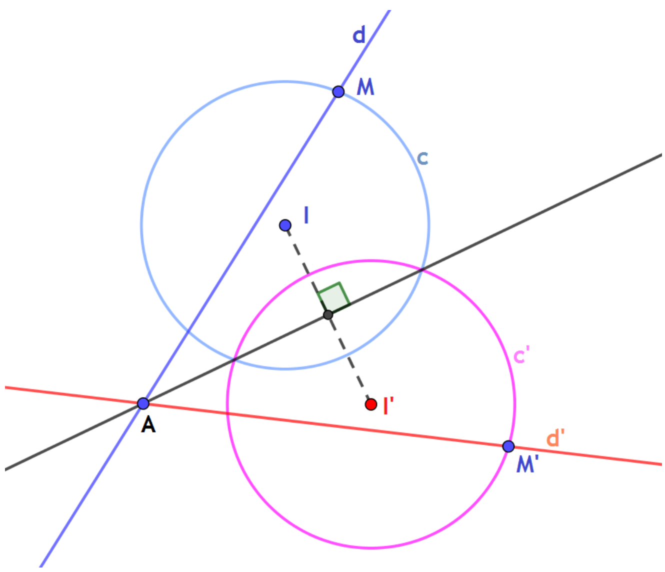
La réflexion par rapport à une droite d associe :

- à chaque point M n'appartenant pas à d, le point M' tel que d soit la médiatrice du segment [MM'].
- à chaque point M de d, le point M lui-même.

Par une réflexion :

- l'image d'une droite est une droite;
- l'image d'un segment est un segment de même longueur;
- l'image d'un cercle C est un cercle de même rayon (et dont le centre est l'image du centre de C).

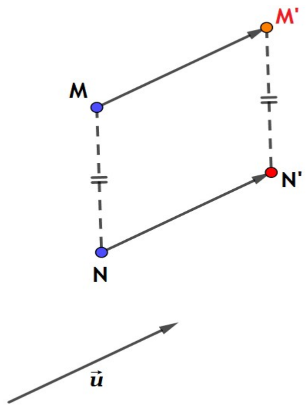
Les réflexions conservent le distance : si M' est l'image de M et N' l'image de N, alors M'N' = MN



I' est l'image de I, M' celle de M, la droite (AM') celle de la droite (AM). L'image du cercle c (de centre I) est le cercle c'(de centre I').

2.2 Translations

Une translation de vecteur $\vec{u}$ associe à tout point M du plan le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Pour tous points M et N d'images respectives M' et N', on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

MNN'M' est donc un parallélogramme.

Les translations conservent donc la distance.

Par une translation,

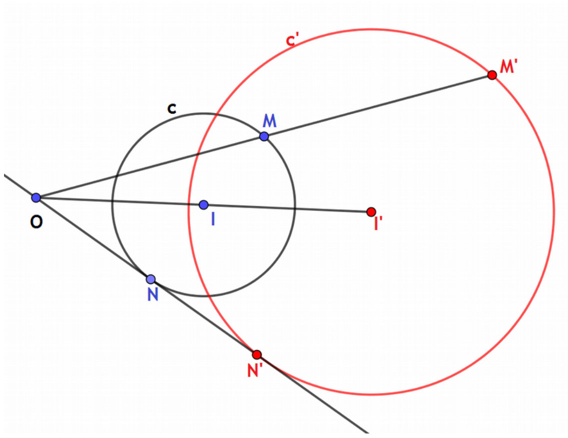
- l'image d'une droite (AB) est une droite parallèle à (AB)
- l'image d'un segment est un segment de même longueur
- l'image d'un cercle de centre O est un cercle de même rayon et de centre O', image de O par la translation
- l'image d'un triangle ABC est un triangle semblable à ABC

2.3 Homothéties

Une homothétie de centre O et de rapport k (où k est un réel non nul) associe à tout point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Pour tous points M et N d'image respective M' et N', on a $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$

On en déduit que M'N' = |k|MN.



Par une homothétie de rapport k,

- l'image d'une droite (AB) est une droite parallèle à (AB)
- l'image d'un segment de longueur l est un segment de longueur |k|l
- l'image d'un cercle de centre I et de rayon R est un cercle de rayon |k|R et de centre I', image de I par l'homothétie
- l'image d'un triangle ABC est un triangle semblable à ABC

Homothéties particulières :

- Une homothétie de rapport 1 est l'identité du plan

- Une homothétie de centre O et de rapport -1 est une symétrie centrale, de centre O.

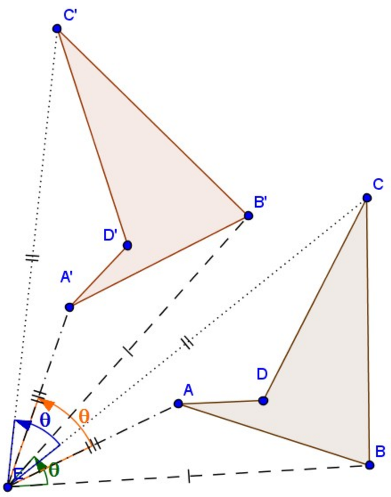
Une homothétie de rapport différent de 1 ne conserve pas les distances.

2.4 Rotations

Une rotation de centre O et d'angle θ associe à tout point M le point M' tel que OM' = OM et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$.

Par une rotation d'angle θ

- l'image d'une droite (AB) est une droite faisant un angle θ avec (AB)
- l'image d'un segment de longueur l est un segment de même longueur
- l'image d'un cercle de centre I de même rayon et de centre I', image de I par l'homothétie
- l'image d'un triangle ABC est un triangle semblable à ABC .



Rotations particulières :

- Une rotation d'angle 0 (ou 2π) est l'identité.

- Une rotation de centre O d'angle π est une homothétie de centre O et de rapport -1. C'est aussi une symétrie centrale de centre O.

Quelques propriétés :

- Si ABC est un triangle isocèle en A, alors B est l'image de C par une rotation de centre A

- Si ABC est un triangle isocèle et rectangle en A, alors C est l'image de C par la rotation de centre A et d 'angle $\frac{\pi}{2}$.

- Si ABC est un triangle équilatéral, alors C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Les rotations conservent le distance : si M' est l'image de M et N' celle de N, alors M'N' = MN