Barycentres

1. BARYCENTRE DE DEUX POINTS

1.1 Théorème et définition

A et B sont deux points donnés, α et β deux réels tels que $\alpha+\beta\neq 0$.

Alors il existe un point G et un seul tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Ce point unique G est appelé barycentre des points pondérés $(A,\alpha),(B,\beta)$.

Conséquence :

Soit G le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta)$.

Nous avons alors $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

Par la relation de Chasles on a : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}$

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

d'où $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

- Les points A, B et G sont donc alignés
- Cette dernière relation permet de construire facilement le point G connaissant A et B.

1.2 Homogénéité du barycentre :

Le barycentre de deux points pondérés reste inchangé si l'on multiplie les coefficients par un même nombre non nul.

En d'autres termes, si G est le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta)$, alors G est aussi le barycentre de $(A,k\alpha),(B,k\beta)$ pour tout réel k non nul.

1.3 Isobarycentre de deux points :

Lorsque $\alpha=\beta$ et $\alpha\neq 0$, on dit que G est l'isobarycentre des points A et B.

1.4 Réduction de l'écriture $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$.

Si $\alpha+\beta\neq 0$, alors les points pondérés $(A,\alpha),(B,\beta)$ admet un barycentre G.

Donc $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

On a alors, pour tout point M, $\alpha(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA})+\beta(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB})=\vec{0}$

$(\alpha+\beta)\overrightarrow{GM}+\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\vec{O}$

d'où $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

Théorème

Si G est le barycentre des points pondérés $(A,\alpha),(B,\beta)$, alors pour tout point M, on a $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

Remarque

Comme cette égalité est vraie pour tout point M, elle est vraie si M = A, et elle s'écrit dans ce cas $\alpha\overrightarrow{AA}+\beta\overrightarrow{AB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}$.

Ce qui donne, puisque $\overrightarrow{AA}=\vec{O}$, $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

2. II. BARYCENTRE DE TROIS POINTS

2.1 Théorème et définition

A, B et C sont deux points donnés, et $\alpha,\ \beta\ et\ \gamma$ trois réels tels que

$\alpha+\beta+\gamma\neq 0$.

Alors il existe un point G et un seul tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Ce point G est appelé barycentre des points pondérés $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$.

2.2 Homogénéité du barycentre :

Le barycentre de trois points pondérés reste inchangé si l'on multiplie les coefficients par un même nombre non nul. En d'autres termes, si G est le barycentre de $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$, alors G est aussi le barycentre de $(A,k\alpha),(B,k\beta),(C,k\gamma)$ pour tout réel k non nul.

2.3 Isobarycentre de deux points :

Lorsque $\alpha=\beta=\gamma$ et $\alpha\neq 0$, on dit que G est l'isobarycentre des points A, B et C .

2.4 Réduction de l'écriture $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}$ si $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$

Théorème

Si G est le barycentre des points pondérés $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$, alors pour tout point M, on a $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$