Série 2 : Exercices sur les suites numériques réelles

Exercice 1:

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n+1} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Soit (v_n) telle que $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison r.
   b) Donner l'expression explicite de v_n. En déduire celle de u_n.

Exercice 2 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $v_n = u_n - 2$.

1. Calculer u_1, v_0 et v_1.
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q.
3. Expliciter v_n puis expliciter u_n.
4. a) Exprimer la somme $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$
   b) En déduire l'expression de $S'_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$

Exercice 3 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \frac{4}{4 - u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique dont on déterminera sa raison et son premier terme.
3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n puis la somme $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=1 \\ 3u_{n+1}=u_n-1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit (v_n) la suite définie par $v_n=2u_n+1$.

1. Calculer u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2.
2. a) Exprimer v_{n+1} en fonction de u_n puis en fonction de v_n ;

   b) En déduire que (v_n) est une suite géométrique, préciser sa raison ;

   c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n ;

   d) Déterminer $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ en fonction de n ;

   e) En déduire $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$.

Exercice 5 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=\dfrac{2u_n+3}{u_n+4} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. On considère la suite (v_n) telle que $v_n=\dfrac{u_n+3}{u_n-4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   a) Calculer v_0, v_1 et v_2 ;

   b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique. Quelle est sa raison ?

   c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n ;

   d) Calculer $v_{n+1}-v_n$. En déduire le sens de variation de la suite (v_n).
3. Calculer $S_n=v_1+v_2+...+v_n$ en fonction de n.

Exercice 6 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+\alpha \end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, où $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Sachant que $u_2=\frac{5}{4}$, calculer α.
2. Dans cette question, on prend $\alpha=\frac{1}{2}$. Soit (v_n) la suite définie par $v_n=u_n-1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison q et le premier terme ;
   b) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
3. Exprimer les sommes $S_n=v_0+v_1+...+v_n$ et $S'_n=u_0+u_1+...+u_n$ en fonction de n.

Exercice 7 :

Soit (u_n) la suite numérique définie par $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-\frac{5}{6} \end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n=3u_n+5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser la raison q et le premier terme v_0 ;
   b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 8 :

On considère la suite géométrique (u_n) définie par $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}=2u_n \end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer une valeur approchée de u_{64}.

Exercice 9 :

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{2}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Ni l'une ni l'autre ?

2. Démontrer que, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.

   a) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique ;

   b) Exprimer v_n en fonction de n ;

   c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis de n. Que vaut u_{10} ?