Séquence 3 : Suites géométriques

1. Définition

Dire qu'une suite (U_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, on a : $U_{n+1} = q\,U_n$.

Ce réel q est appelé **raison** de la suite : $q = \frac{U_{n+1}}{U_n}$.

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre q.

Exemples :

- La suite des puissances successives de 2 est la suite géométrique de 1er terme 1 et de raison 2.
- La suite géométrique de terme général $U_n = (-1)^n$ est la suite géométrique de raison q = -1 et de premier terme $U_0 = 1$.

2. Relation entre les termes

(U_n) est une suite géométrique de premier terme U_0 et de raison $q \neq 0$.

D'après la définition, $U_1 = q\,U_0$; $U_2 = q\,U_1 = q \times q\,U_0 = q^2\,U_0$; $U_3 = q\,U_2 = q \times q^2\,U_0 = q^3 U_0 \dots$

Donc : $U_n = q^n\,U_0$.

Mais si l'indice commence par un entier p > 0, $U_p = q^p\,U_0$ et $U_n = q^n\,U_0$. En divisant membre à membre :

$$\frac{U_n}{U_p} = \frac{q^n\ U_0}{q^p\ U_0} = q^{n-p}$$.

Ainsi : $U_n = q^{n-p}\,U_p$

3. Somme des termes

On cherche à calculer la somme $S = U_k + U_{k+1} + U_{k+2} + \dots + U_n$, où (U_n) désigne une suite géométrique de raison q.

On obtient : $$S = \frac{1-q^{n-k+1}}{1-q} U_k$$

4. Méthode et applications

Pour montrer que la suite (U_n) est géométrique, on cherche à écrire $U_{n+1}= q\ U_n$, le nombre q étant indépendant de n. Il suffit donc de prouver que le quotient $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ ne dépend pas de n.

Exemples :

- Montrer que la suite (U_n) , définie par $U_n=\frac{2}{3^n}$ est géométrique.
- La suite (V_n) est définie par $V_0 = 6$ et pour tout entier n, $V_{n+1} = 3\ V_n +4$. On pose la suite (W_n) telle que pour tout entier n, $W_{n+1} = W_n + 2$.

  1) Calculer les trois premier termes de cette suite.

  2) Montrer que (W_n) est une suite géométrique, dont on donnera la raison et le premier terme.

Solutions :

- Pour tout entier non nul, $U_n \neq 0$.

  Calculons alors $\frac{U_{n+1}}{U_n}$. $\frac{U_{n+1}}{U_n}=\frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}}=\frac{2}{3^{n+1}}\times\frac{3^n}{2}=\frac{1}{3}$.

  La suite est géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$.

- 1) $W_0 = 8$; $W_1 = 24$ et $W_0 = 72$.

  2) Puisque pour tout n, $W_{n+1} = V_{n+1} +2 = 3V_n +4+2 = 3V_n +6 = 3\ (V_n +2) = 3W_n$.

  C'est une suite géométrique de raison q = 3, de premier terme $W_0 = 8$.