Equilibre d’un solide soumis à 3 forces non parallèles

1.Expérience:

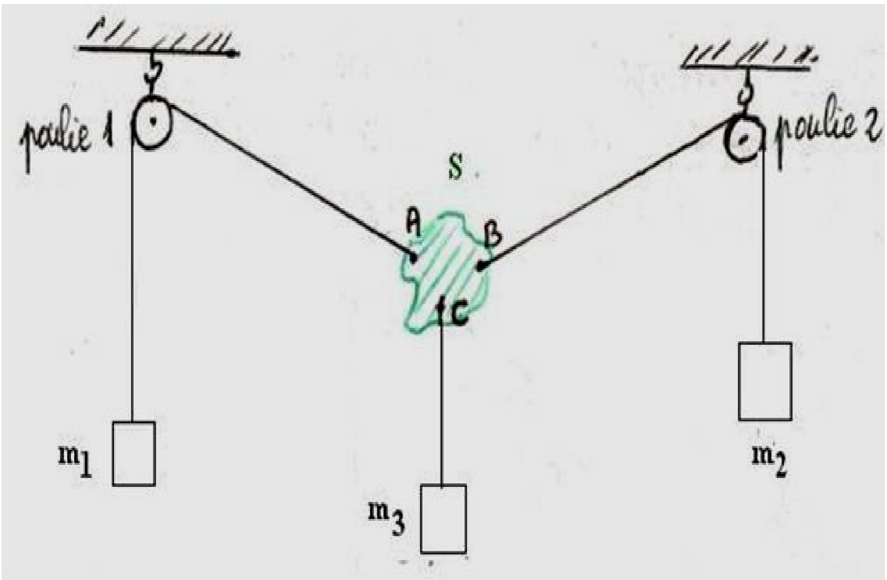
1.1 Dispositif expérimental:

Un solide S en liège est tiré en A, B et C par 3 fils reliés à des masses marquées m_1, m_2 et m_3. par l’intermédiaire de poulies (voir figure ci-dessous).

La masse du solide est négligeable devant celles des masses marquées

On donne: m_1=0.1kg; m_2=0,15kg; m_3=0.2kg; g=10N.kg^{-1}.

Il est souhaitable de placer une planche verticale ou un carton juste derrière les fils pour réaliser une construction graphique.



1.2 Premières observations :

Le solide S étant abandonné dans une position quelconque il se déplace spontanément pour prendre une position d’équilibre stable.

A l’équilibre,

- les 3 fils restent toujours dans le plan vertical.

-si l’on ajoute une surcharge sur l’une des masses, l’équilibre est provisoirement rompu. Un nouvel état d’équilibre est obtenu avec des directions différentes des fils. **L’objet reste toujours dans le même plan vertical.**

1.3 Exploitation de l'expérience:

Les fils exercent des forces $\vec{F}_1$ en A, $\vec{F}_2$ en B et $\vec{F}_3$ en C

Recherchons **graphiquement** une relation entre ces 3 forces:

Les intensités des forces sont lues sur un dynamomètre ou déterminées en calculant le poids des masses marquées, soit :

$F_1=m_1.g=1N$; $F_2=m_2.g=1,5N$; $F_3=m_3.g=2N$

CONSTRUCTIONS GRAPHIQUES:

Reporter sur une feuille de dessin placée dans le plan vertical les directions (D_1),(D_2) ,(D_3) des trois forces $\vec{F}_1$;$\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$.

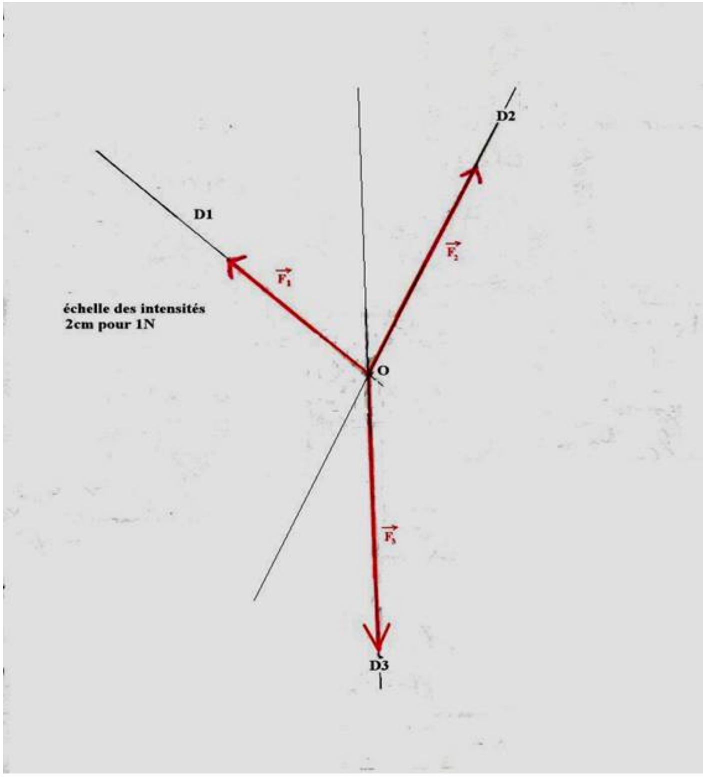
(il est recommandé de prolonger les directions des forces bien au-delà des extrémités des vecteurs)

Nous constatons que les 3 directions des forces se coupent en un même point O.

Remarque: nous choisissons ce point O comme origine commune des vecteurs forces. Ce choix n'affecte pas l'équilibre du solide.

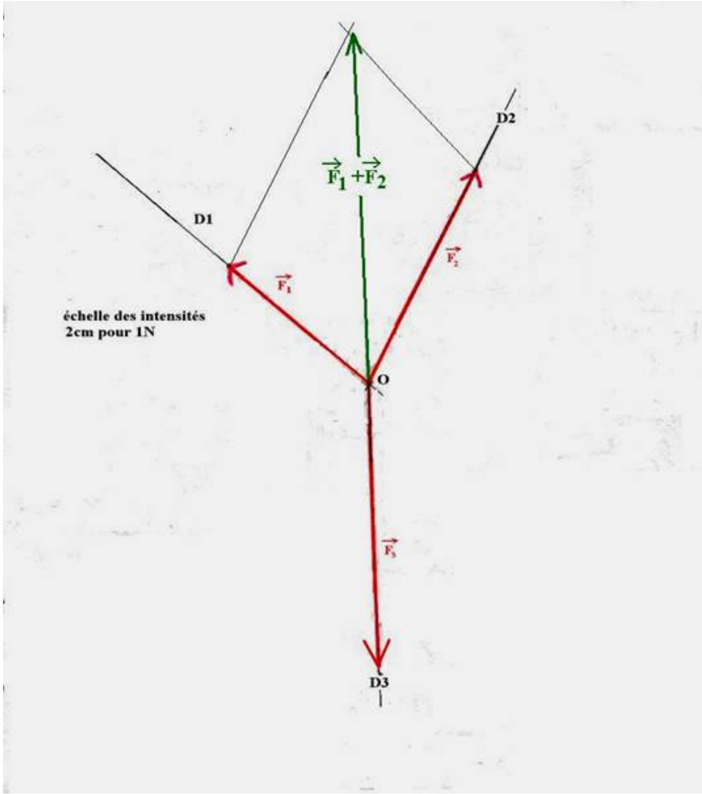
Sur ces directions dessiner les vecteurs forces en respectant l'échelle **2cm pour 1N.**

On obtient la construction ci-dessous:



Nous allons maintenant donner **la relation entre les vecteurs forces**.

.1ère méthode: construire le vecteur somme $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ en utilisant la **règle du parallélogramme.**



Comparer ce vecteur somme avec $\vec{F}_3$.

Nous constatons alors que le vecteur somme $\vec{F}_1+\vec{F}_2$ est l'opposé du vecteur

Nous avons donc:

$$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=-\overrightarrow{F_3}$$

Et donc

$$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$$

.Méthode du «polygone des forces» :

Elle consiste à tracer directement la somme des 3 forces mis bout à bout à partir du point O. On obtient le «polygone des forces»:

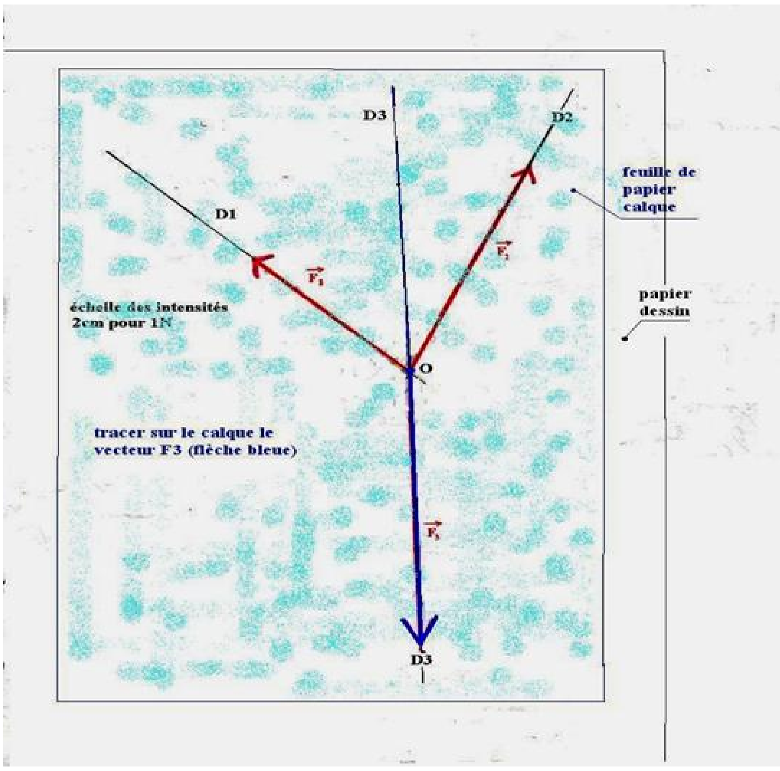
(Cette façon de représenter la somme vectorielle est bien utile pour traiter certains exercices.)

Posons sur le dessin précédent **une feuille de papier calque** ou une feuille de papier ordinaire suffisamment translucide.

(pour que l'explication soit plus claire, la feuille de calque est représentée en bleuté sur les images qui suivent)

a-Par transparence, tracer sur le calque la direction (D_3) et le vecteur $\vec{F}_3$ **:**

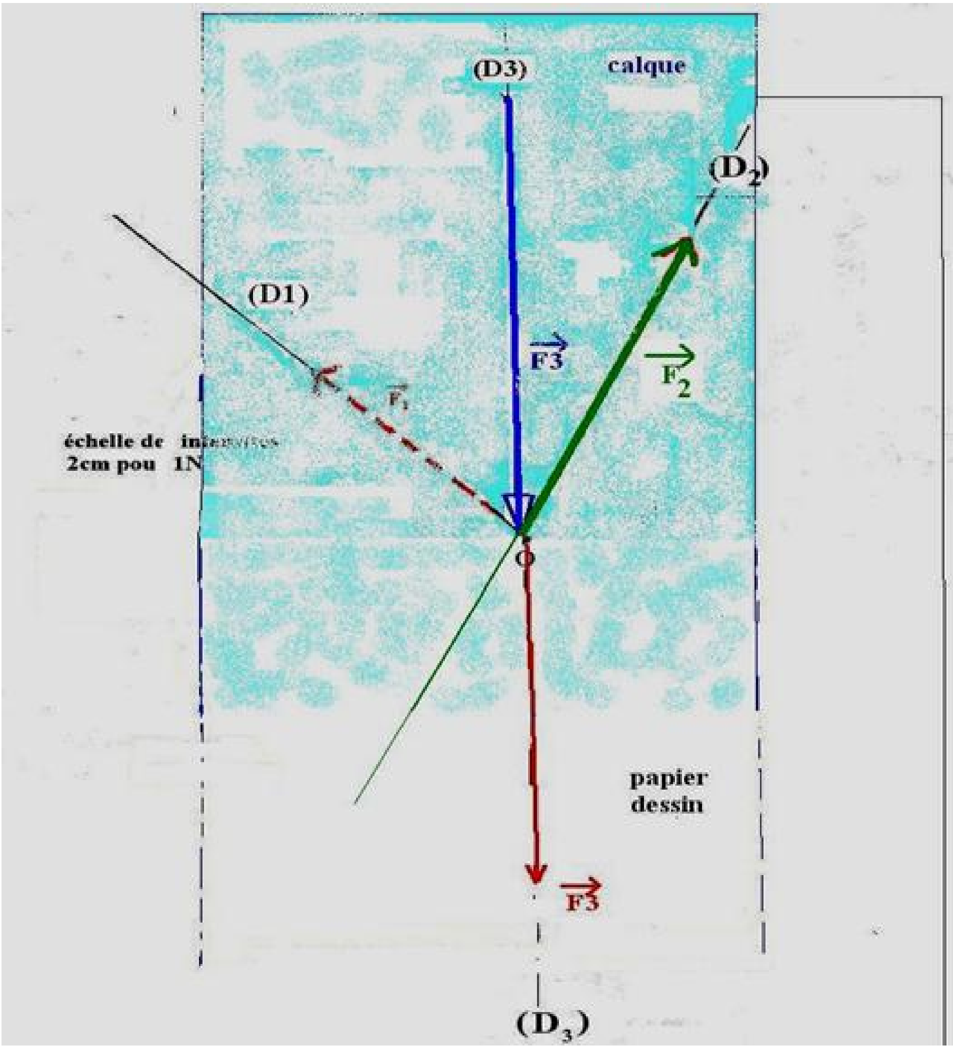
(flèche bleue ,voir fig ci-dessous)



b-Déplacer le calque vers le haut en maintenant la flèche bleue $\vec{F}_3$ sur son support (D_3). Faire coïncider l'extrémité de la flèche $\vec{F}_3$ avec le point O

Par transparence, tracer ensuite sur le calque la direction (D_2) et le vecteur $\vec{F}_2$ (flèche verte). L'extrémité de $\vec{F}_3$ est alors confondue avec l'origine de $\vec{F}_2$.

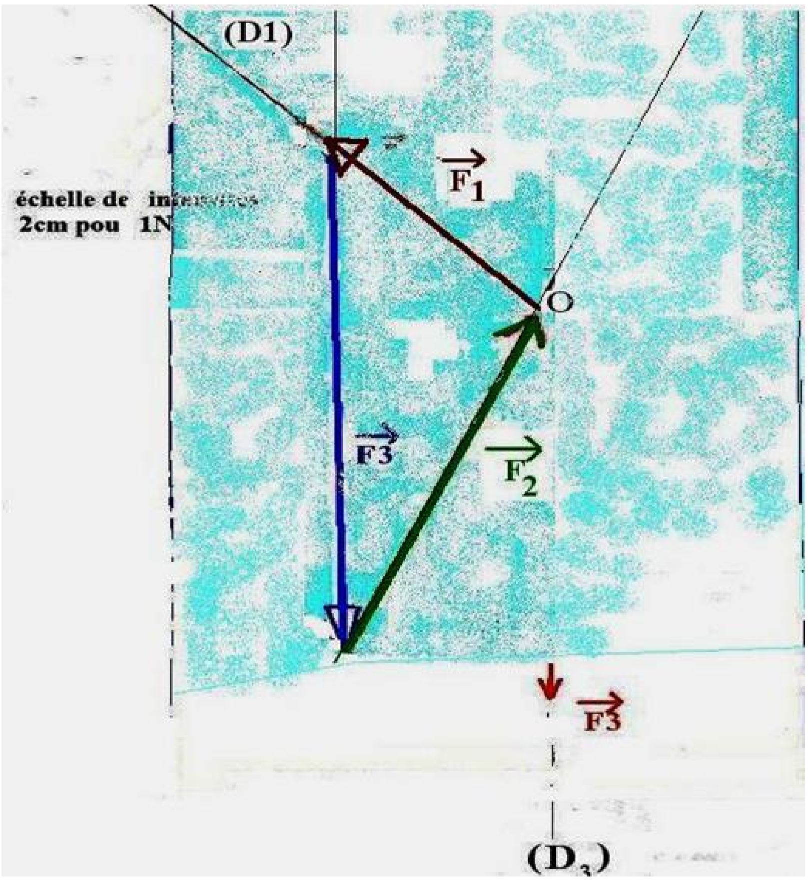
(voir fig ci-dessous)



c- Déplacer le calque en maintenant la flèche verte sur son support (D_2). Faire coïncider l'extrémité de la flèche $\vec{F}_2$ avec le point O.

Tracer sur le calque la direction (D_1) et le vecteur $\vec{F}_1$ (flèche marron).

Nous obtenons la somme des vecteurs $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$.



Nous constatons que l'extrémité du vecteur $\vec{F}_1$ et l'origine du vecteur $\vec{F}_3$ se confondent pratiquement. La somme vectorielle est donc quasi nulle.

Nous admettrons qu'à l'équilibre:

$$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$$

2. Conclusion à retenir:

Si un solide soumis à trois forces non parallèles est en équilibre, nécessairement

-les trois forces sont dans un même plan.

-les directions des trois forces sont concourantes.

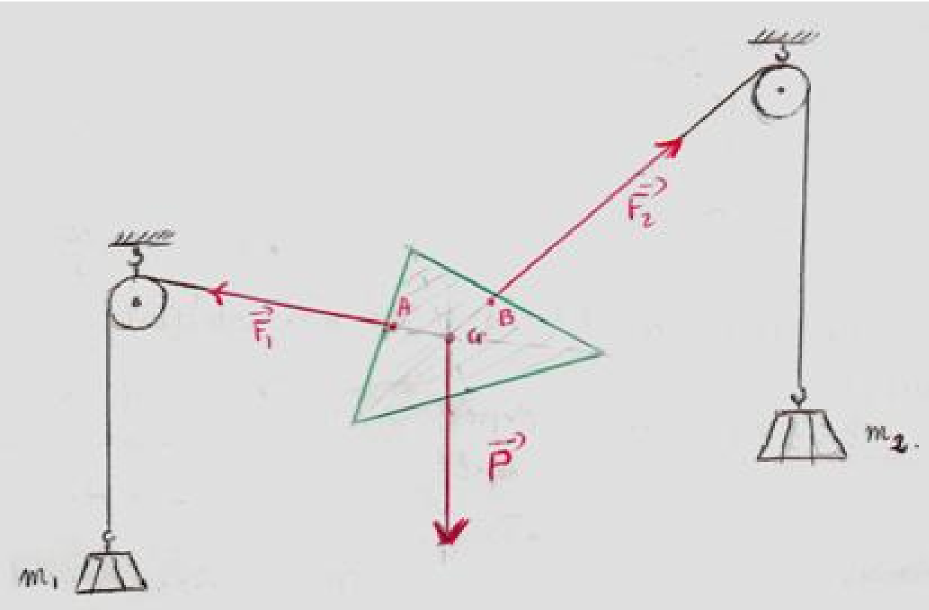
-la somme vectorielle des trois forces est nulle :

$$\boxed{\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0}}$$

3. Dispositif avec objet pesant:

Le principe de l'étude est identique, la force $\vec{F}_3$ est remplacée par $\vec{P}$ de valeur connue. On dispose d'un solide S, dont on a repéré au préalable le centre de gravité G. Deux fils tendus maintiennent S en équilibre.

Le poids n'étant pas négligeable, le solide est soumis à 3 forces extérieures : son poids $\vec{P}$ et les tensions des fils $\vec{F}_1$ **et** $\vec{F}_2$



4. Exercices d'application:

Détermination d'une force d'origine électrostatique.

La boule chargée d'un pendule électrostatique, de poids P = 0,03 N, est repoussée par un corps chargé. A l'équilibre, le fil du pendule fait un angle $\alpha=6°$ avec la verticale. On suppose que la force d'origine électrique s'exerçant sur la boule a une direction horizontale.

Déterminer la force d'origine électrique exercée sur la boule et la tension du fil.

Correction

Le solide à étudier est la boule du pendule, assimilable à un point matériel confondu avec le centre O de la boule.

Faisons le bilan des forces extérieures appliquées à la boule:

- La tension $\vec{T}$ du fil, force exercé par le fil sur la boule et dont le support à la direction du fil;

-Le poids $\vec{P}$ de la boule, force exercée par la Terre, sur la boule, et dont la direction est verticale et l'intensité connue (0,03 N)

-La force électrique $\vec{F}$, force exercée par le corps chargé sur la boule chargée, et dont la direction est horizontale.

A l'équilibre, le fil du pendule électrostatique fait un angle α avec la verticale et l'on a

$$\vec{P}+\vec{F}+\vec{T}=\vec{O}$$

Construisons le polygone des 3 forces $\vec{P}$, $\vec{T}$, $\vec{F}$ (voir fig du bas)

Depuis l'origine A de $\vec{P}$, traçons la droite d'action (D1) de $\vec{T}$ inclinée de 6° par rapport à la verticale.

Depuis l'extrémité B de $\vec{P}$, traçons la direction (D2) de $\vec{F}$ qui est horizontale.

L'intersection de ces deux directions (point C) correspond à l'extrémité de $\vec{F}$

Ayant choisi une échelle, il est facile d'en déduire F

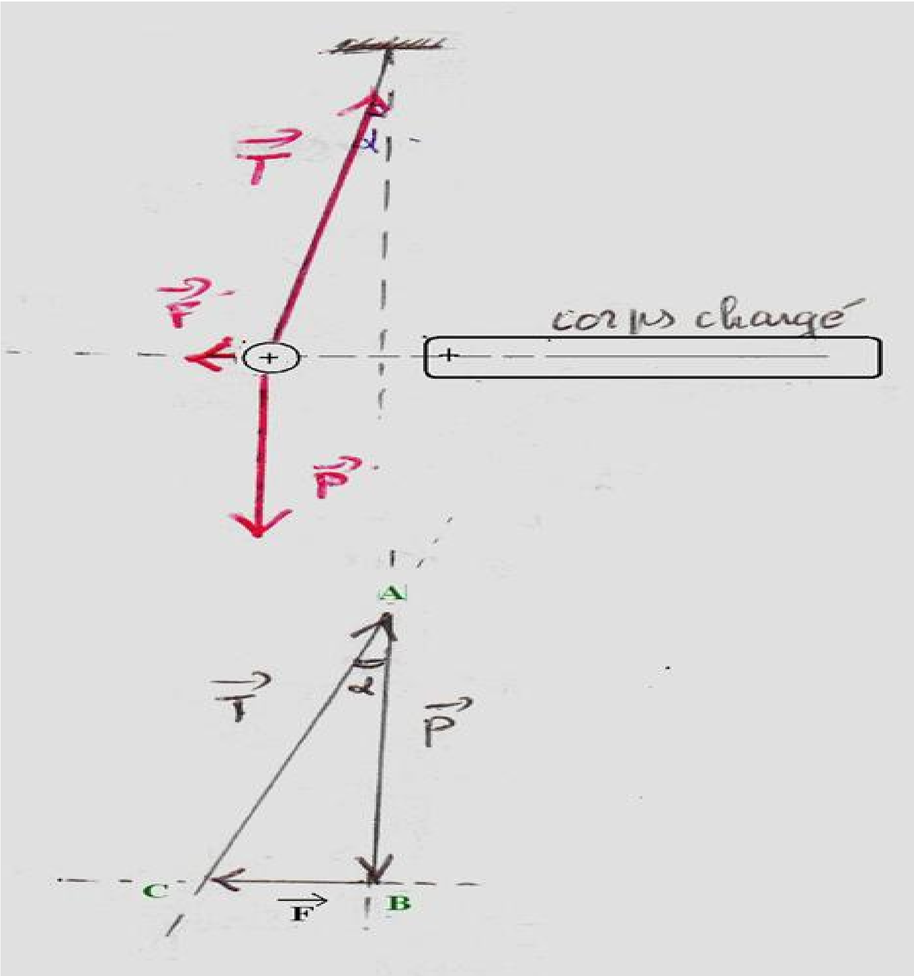
On peut aussi déterminer F par le calcul:

On a:

$$\tan(\alpha)=\frac{\mathbf{AC}}{\mathbf{AB}}=\frac{\mathbf{F}}{\mathbf{P}}\rightarrow\mathbf{F}=\mathbf{P}\tan(\alpha) \qquad \text{soit} \qquad \mathbf{F}=0{,}03\,\mathbf{x}\tan(6°)=0{,}0032\,\mathbf{N}$$

La force électrique a une très faible intensité.

De même: $$\cos(\alpha)=\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{CA}}=\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{T}};\mathbf{T}=\frac{\mathbf{P}}{\cos(\alpha)} \qquad \text{d'où} \qquad \mathbf{T}=\frac{0{,}03}{\cos(6°)}=0{,}0302\,\mathbf{N}$$



5. Méthode générale pour résoudre les exercices:

Pour étudier, relativement à un référentiel terrestre, l'équilibre d'un solide soumis à 3 forces non parallèles, nous suivrons la méthode ci-dessous.

Faire un schéma clair,

Isoler le solide à étudier,

Faire l'analyse des actions extérieures agissant sur le solide,

Appliquer les conditions nécessaires d'équilibre et le principe d'interaction.

→Les supports des 3 forces sont concourants. Cette condition permet en général de déterminer le point de concours des supports à l'aide de 2 forces seulement; on pourra connaître ainsi la direction de la 3ème force.

Connaître les directions des forces, on représentera les vecteurs force à l'échelle.

Ainsi:

*Une construction graphique permettra, en général, de résoudre le problème.

*On utilisera également des relations trigonométriques dans un triangle, si cela est possible

*On peut également définir un repère orthonormé et projeter la relation vectorielle suivant 2 axes orthogonaux. On déterminera ainsi suivant ces 2 axes les composantes des vecteurs $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ et $\vec{F}_3$.

Exercices à résoudre:

1- On tire sur un anneau à l'aide de 3 cordes; les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ exercées ont des intensités respectivement égales à 200N et 300N et font entre-elles un angle de 90°. (figure 1)

Déterminer la direction et l'intensité de la force $\vec{F}_3$ qu'il faut exercer pour que l'anneau reste immobile

2- On maintient un anneau de masse négligeable, immobile, en exerçant 3 forces à l'aide de 3 cordes. Deux d'entre elles font un angle de 120° et leurs intensités respectives sont (figure 2)

Préciser l'intensité, la direction et le sens de la force $\vec{F}_3$

3- Les masses des fils et de l'anneau ci-dessous sont négligeables. A l'équilibre le fil OA fait un angle de 45° avec la verticale.

Calculer la masse m_2 pour realiser cet équilibre. Calculer également la tension du fil OA. Cet équilibre dépend –il de la valeur de g?

On donne: poids de m_1; g= 10N.kg^{-1}