Séquence 3 : Calculs approchés

1. Approximation d'ordre n

Soit x un réel. Les nombres décimaux consécutifs $\frac{p}{10^n}$ et $\frac{p+1}{10^n}$ sont appelés **approximations décimales d'ordre n de x** respectivement par **défaut** et par **excès** si et seulement si :

$$\frac{p}{10^n} \leq x \leq \frac{p+1}{10^n}.$$

Exemples :

- 3,1 < π < 3,2

  3,1 est l'approximation décimale d'ordre 1 par défaut de π.

  3,2 est l'approximation décimale d'ordre 1 par excès de π.

- 3,14 < π < 3,15

  3,14 est l'approximation décimale d'ordre 2 par défaut de π.

  3,15 est l'approximation décimale d'ordre 2 par excès de π.

- $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$

  1,414 est l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $\sqrt{2}$.

  1,415 est l'approximation décimale d'ordre 3 par excès de $\sqrt{2}$.

- $-0{,}334<\frac{-1}{3}<0{,}333$

  -0,334 est l'approximation décimale d'ordre 3 par défaut de $\frac{-1}{3}$.

  -0,333 est l'approximation décimale d'ordre 3 par excès de $\frac{-1}{3}$.

2. Arrondis d'ordre n

Soit x un réel. On appelle **arrondi d'ordre n de x** l'approximation décimale d'ordre n la plus proche de x, c'est-à-dire qui est à la plus petite distance de x.

3. Troncature d'ordre n - Règles d'arrondi d'ordre n

On obtient la **troncature d'ordre n** d'un nombre en supprimant tous les chiffres décimaux situés après le n^{ième} chiffre décimal.

Exemple :

Soit le nombre : x = 2,526173084… .

- 2 est la troncature d'ordre 0 de x.
- 2,5 est la troncature d'ordre 1 de x.
- 2,52 est la troncature d'ordre 2 de x.
- 2,526 est la troncature d'ordre 3 de x.
- 2,5261 est la troncature d'ordre 4 de x.

Pour obtenir l'arrondi d'ordre n d'un nombre dont on connaît le début de l'écriture décimale,

on procède comme suit :

- Si le (n+1)^{ième} chiffre après la virgule est 0 ; 1 ; 2 ; 3 ou 4, alors l'arrondi d'ordre *n* est la troncature d'ordre *n* de ce nombre.

- Si le (n+1)^{ième} chiffre après la virgule est 5 ; 6 ; 7 ; 8 ou 9, l'arrondi d'ordre *n* est obtenu en augmentant d'une unité le chiffre de droite de la troncature.

Exemples :

- Revenons à l'exemple précédent, soit x = 2,526173084… .
  - L'arrondi d'ordre 0 de x est 3.
  - L'arrondi d'ordre 1 de x est 2,5.
  - L'arrondi d'ordre 2 de x est 2,53.
  - L'arrondi d'ordre 3 de x est 2,526.
  - L'arrondi d'ordre 4 de x est 2,5262.
- Soient les nombres: $\sqrt{5}=2{,}236067977\ldots$; $-\frac{8}{7}=-1{,}142857143\ldots$.

- L'arrondi d'ordre 0 de $\sqrt{5}$ est 2.
  - L'arrondi d'ordre 1 de $\sqrt{5}$ est 2,2.
  - L'arrondi d'ordre 2 de $\sqrt{5}$ est 2,24.
  - L'arrondi d'ordre 3 de $\sqrt{5}$ est 2,236.
  - L'arrondi d'ordre 4 de $\sqrt{5}$ est 2,2361.

- L'arrondi d'ordre 0 de $-\frac{8}{7}$ est -1.

- L'arrondi d'ordre 1 de $-\frac{8}{7}$ est -1,1.
- L'arrondi d'ordre 2 de $-\frac{8}{7}$ est -1,14.
- L'arrondi d'ordre 3 de $-\frac{8}{7}$ est -1,143.
- L'arrondi d'ordre 4 de $-\frac{8}{7}$ est -1,1429.

4. Ordre de grandeur d'un nombre décimal

4.1 Écriture normalisée d'un nombre décimal positif

Soit x un nombre décimal positif. Alors on peut écrire x sous la forme x = a x 10^n où n est un entier relatif et a un nombre décimal vérifiant 1 ≤ a < 10.

L'écriture **x = a x 10^n** est appelée **écriture normalisée de x**.

Exemples :

- 2,635 x10^{-2} est l'écriture normalisée de 263,5.
- 1,27x10^{-1} est l'écriture normalisée de 0,127.

4.2 Ordre de grandeur d'un nombre décimal positif

Soit a x 10^n l'écriture normalisée d'un nombre décimal x et A l'arrondi d'ordre 0 de a.

Alors **A x 10^n** est appelé **ordre de grandeur de x**.

Exemples :

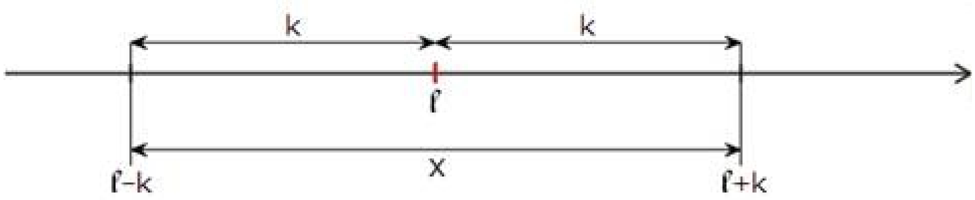
Nombre x	Écriture normalisée	Ordre de grandeur
193,5	1,935 x10^2	2 x10^2= 200
0,521	0,5 x10^{-1}	1x10 $^{-1}$= 0,1
1470	1,47 x10^3	1 x10^3= 1000
1500	1,5 x10^3	2 x10^3 = 2000

5. Valeurs approchées

Soit x un réel donné et k un réel strictement positif.

On dit que le réel **l** est une ***valeur approchée*** de x à k-près si, et seulement si,

| x – l | < k ou d (x,**l**) < k ou $x \in [l-k;l+k]$



Exemple :

Sachant que π = 3,141592…, montrer que 3,12 est une valeur approchée de π à $3x10^{-2}$près.

π - 3, 12 = 0,021592… $3x10^{-2}$.

On conclut que 3,12 est une valeur approchée de π à 3 $x10^{-2}$ près.

6. Encadrement d'un nombre réel

On appelle **encadrement** d'un nombre réel x tout intervalle borné contenant x.

L'amplitude de l'encadrement est la distance des extrémités de cet encadrement.

Exemples :

- Une calculatrice affiche π = 3,141592….

  [3,1; 3,2] est un encadrement de π d'amplitude 0,1. En effet, 3,1 < π < 3,2 et 3,2 - 3,1 = 0,1.

- Sachant que $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$, trouver un encadrement des nombres suivants :

  a) $1+\sqrt{2}$; b) $3\sqrt{2}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Réponse :

a) Des inégalités $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$ on déduit que $1+1{,}414<1+\sqrt{2}<1+1{,}415$.

Soit $2{,}414<1+\sqrt{2}<2{,}415$.

b) De même, des inégalités $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$, on déduit que $3\times1{,}414<3\sqrt{2}<3\times1{,}415$.

Soit $4{,}242<3\sqrt{2}<4{,}245$.

c) De même, des inégalités $1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$, on déduit que $\frac{1}{2}\times1{,}414<\frac{1}{2}\times\sqrt{2}<\frac{1}{2}\times1{,}415$.

Soit $0{,}7070<\frac{\sqrt{2}}{2}<0{,}7075$.