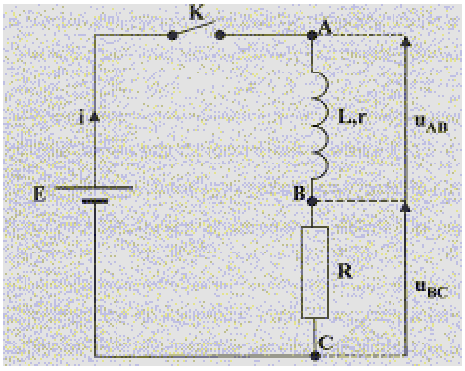
Exercices sur circuits RC, RL, RLC. Analogies électromécaniques d'un oscillateur*

Exercice1: dipôle RL

Source :http://www.chimix.com/an6/concours/berck61.htm

Un circuit est composé d'un générateur continue de f.e.m E, d'une bobine d'inductance L et de résistance r= 10 Ω, d'un interrupteur K et d'un conducteur ohmique R. Un dispositif informatisé permet de suivre les valeurs des tensions u_{AB} et u_{BC} au cours du temps. La fermeture de l'interrupteur est prise comme origine des temps.

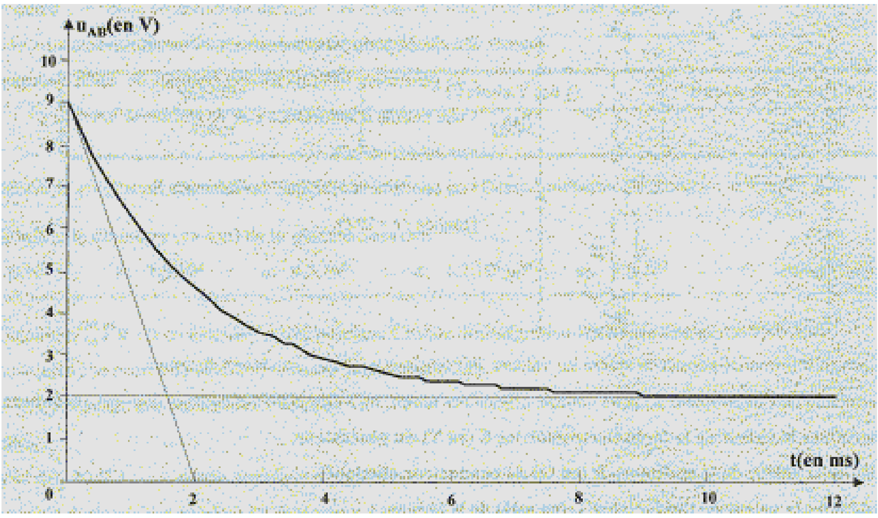


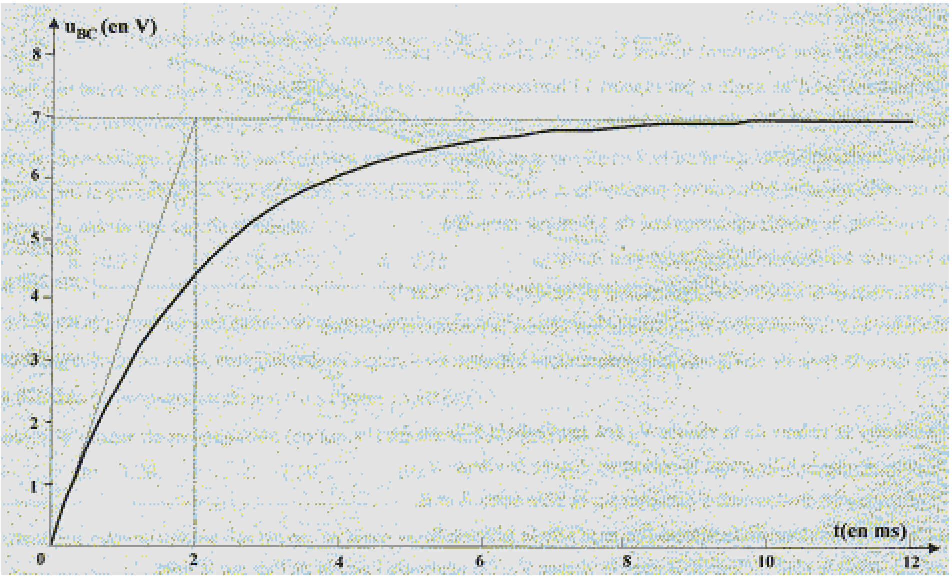
Déterminer E.

Calculer R et en déduire L (en mH).

Donner l'expression littérale de l'intensité i du courant en fonction de L, R , E et r. En déduire la valeur de l'intensité à t= 0,003 s.

Calculer la valeur de l'énergie stockée par la bobine à t = 0,003 s.





corrigé

1-Déterminer E : u_{AB} + u_{BC}= E avec u_{BC} = Ri et u_{AB} = Ldi/dt + ri

en régime permanent di/dt=0 ; u_{BC} = 7 V ; u_{AB} =2 V soit E = 9 V.

2-Calculer R et en déduire L : en régime permanent u_{BC} = 7= RI ; u_{AB} =2 = rI soit I= 2/10 = ; R= 7/0,2 = 35 Ω.

R[di/dt]$_{t=0}$ = 7/2 10^{-3} soit [di/dt]$_{t=0}$ =7/(2R 10^{-3}) = 100 A/s ;

tension aux bornes de la bobine à t=0 : 9= L[di/dt]$_{t=0}$ =100 L d'où L= 9/100 = 0,09 H = 90 mH

ou bien à partir de la constante de temps τ du dipôle qui est égale à 2 10^{-3} s (lecture graphe) ; de plus τ = L/(R+r)

d'où L= τ (R+r) = 2 10^{-3}*45 = 90 mH.

3-Expression littérale de l'intensité i du courant en fonction de L, R , E et r :

u_{AB} + u_{BC}= E avec u_{BC} = Ri et u_{AB} = Ldi/dt + ri

éq différentielle : E= Ldi/dt + (R+r) i

La solution est de la forme

$$i(t) = Ae^{\frac{(R+r)}{L}t} + B$$

à t = 'intensité est nulle d'où A+B=0 soit B=-A.

en régime permanent (t <5 τ) : 0,2 = B = E/(R+r)

$$i(t) = (\frac{E}{R+r})[1-e^{\frac{(R+r)}{L}.t}] = 0,2.(1-e^{-\frac{t}{2.10^{-3}}})$$

i(t=0,003) = 0,2 (1-exp (-1,5)) =0,155 A.=155 mA

4-valeur de l'énergie stockée par la bobine à t = 0,003 s :

½Li² = 0,5*0,09*0,155² = 1,1 10^{-3} J = 1,1 mJ.

Exercice 2: analogies électromécaniques d'un oscillateur

On considère les deux oscillateurs idéaux suivants (voir figures A et B ci-dessous) :

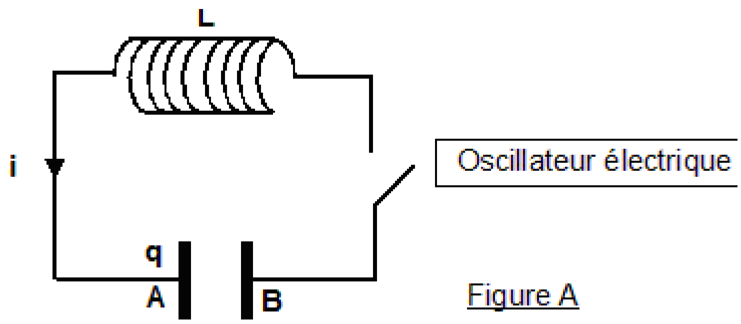


Figure A

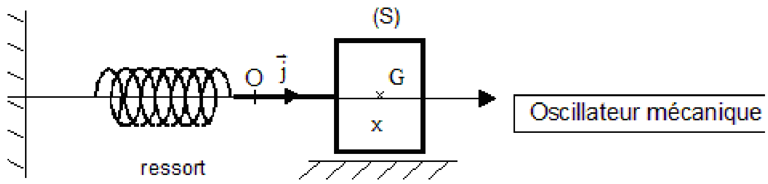


Figure B

-un circuit électrique comprenant :

- une bobine d'inductance L et de résistance négligeable ; un condensateur de capacité C et d'armatures A et B; un interrupteur.

Les conventions d'orientation sont telles que l'intensité du courant est i = dq/dt , q(t) étant la charge instantanée du condensateur, c'est-à-dire celle de l'armature A.

Les conditions initiales du fonctionnement sont les suivantes: à t négatif ou nul, l'interrupteur est ouvert et le condensateur porte la charge q(0) = Q_0 à t = 0, on ferme l'interrupteur. On donne L= 0,10 H ; C = 10,0 µF et Q_0= 10^{-4}C.

·un système {solide - ressort} horizontal comprenant :

- un solide (S), de masse m et de centre d'inertie G, glissant sans frottement dans la direction de l'axe O horizontal et d'origine O (voir Figure B) : si (S) est au repos, G est en O ; à un instant quelconque, G est repéré par son abscisse x

- un ressort à spires non jointives de raideur k, de masse négligeable, dont l'une des extrémités est attachée à (S) et l'autre fixée rigidement à un support.

Les conditions initiales choisies sont les suivantes: à l'instant t = 0, la position du centre d'inertie du solide vaut X_0 et sa vitesse v_x est nulle.

On donne le rapport m/k=1,0.10^{-2} S.I. et X_0 = + .

I- Oscillateur mécanique

On admet que l'équation différentielle vérifiée par x(t) est md²x/dt² +kx=0 où d²x/dt² désigne la dérivée seconde par rapport au temps de la fonction x(t).

Faire le bilan des forces agissant sur (S). Les représenter sur un schéma.

Retrouver l'équation différentielle du mouvement en précisant la loi physique utilisée.

Quelles que soient les valeurs de A et φ, vérifier que x = A.cos(2π t/T+φ) est solution de l'équation différentielle précédente si T a une valeur fonction de k et m dont on donnera l'expression. Quelle est l'unité du rapport m/k ? Comment appelle-t-on T ? Quelle est sa valeur numérique ?

En prenant en compte les conditions initiales du début de l'énoncé, montrer que A = X_0 et φ = 0.

II- Oscillateur électrique

On admet que l'équation différentielle vérifiée par la charge q(t) est : Ld²q/dt² +q/C=0

On utilise de façon systématique la comparaison entre les deux équations différentielles.

Quelle est la grandeur mécanique correspondant à l'intensité instantanée du courant i(t) ? Quelles sont les grandeurs électriques correspondant respectivement à la raideur du ressort et à la masse du solide (S) ?

En utilisant les similitudes entre les équations différentielles et les conditions initiales, montrer que la charge instantanée du condensateur est q(t) = Q_0.cos(2π t/T). Donner l'expression de T' en fonction des caractéristiques des composants du circuit. Calculer numériquement T'.

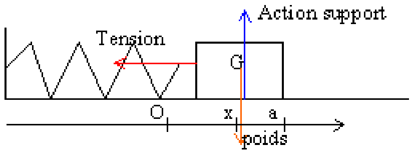
Représenter sur deux schémas différents les fonctions x(t) et q(t). Le dessin fait pour t variant de 0 à 2T (ou 2T') peut être approximatif mais on aura soin de bien préciser les points importants: situation à l'origine des temps, extrémum, passage par la valeur nulle.

Les oscillateurs réels ne sont pas idéaux. Pourquoi ? Quels sont les phénomènes physiques responsables ?

corrigé I- oscillateur mécanique

1-(S) est soumis à son poids, vertical, vers le bas, de valeur mg, à l'action du support, opposée au poids et à la tension du ressort, horizontale d’expression:

$$\boxed{\vec{T} = -k.x\vec{i}}$$



2-équation différentielle du mouvement : écrire la seconde loi de Newton

Projection de cette expression sur un axe horizontal orienté vers la droite

$-kx = md^2x/dt^2$ ou $d^2x/dt^2 + k/m\ x=0$

3-Je vérifie que $x = A.\cos(2\pi\ t/T+\varphi)$ est solution de l'équation différentielle : dériver x par rapport au temps :

$x' = -A2\pi\ /T\sin\ (2\pi\ t/T+\varphi)$; $x'' = -A(2\pi\ /T)^2 \cos\ (2\pi\ t/T+\varphi) = -\ (2\pi/T)^2\ x$

report dans l'équation différentielle : $-\ (2\pi\ /T)^2\ x + k/m\ x=0$ doit être vérifiée quelque soit le temps d'où $(2\pi\ /T)^2= k/m$

soit $T^2 = (2\pi)^2\ m/k$ ou . $\boxed{T = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}}}$

unité du rapport m/k : 2π est sans dimension et T, période exprimée en seconde donc m/k s'exprime en s^2.

valeur numérique : $T= 6{,}28\ (\ 10^{-2})^{½}= 0{,}63$ s.

4- En prenant en compte les conditions initiales du début de l'énoncé : $x(0) = X_0$.

$A \cos(\varphi) = X_0$ positif conduit à : $A= X_0$ et $\varphi\ = 0$.

ou encore sachant que la vitesse initiale est nulle : $x'= -A2\pi\ /T\sin\ (2\pi\ t/T+\varphi)$; $x'(0)= -A2\pi\ /T\sin\ (\varphi) = 0$ avec A différent de zéro

$\sin\ (\varphi) =0$ donne $\varphi\ =0$ ou $\varphi =\pi$; cette dernière valeur ne peut pas être retenue car A est positif.

II –oscillateur électrique:

1-grandeur mécanique correspondant à l’intensité:

mécanique	électrique
$md^2x/dt^2 +kx=0$	$Ld^2q/dt^2 +q/C=0$
x	q
X_0	Q_0
m	L
k	1/C
$v(t)=dx/dt$	$i(t)=dq/dt$

En utilisant les similitudes entre les équations différentielles et les conditions initiales $x(0) = X_0$ et

$q(0)= Q_0$:

$v(t) = x'(t) = -A2\pi\ /T\sin\ (2\pi\ t/T)$ et $i(t) = dq/dt$ conduisent à $dq/dt = -A2\pi\ /T\sin\ (2\pi\ t/T)$

2-par intégration la charge instantanée du condensateur vaut :

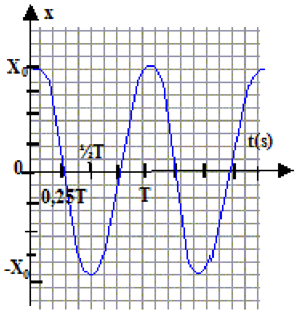
q(t) = Acos (2π t/T) avec A= charge initiale = Q_0

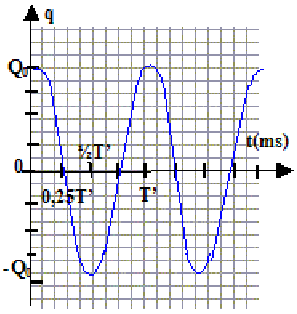
expression de T' en fonction des caractéristiques des composants du circuit :

$$\boxed{T' = 2.\pi.\sqrt{L.C}}.$$

valeur numérique : T' = 6,28 (0,1 10^{-5})^{½}=6,3 10^{-3} s.

3-les fonctions x(t) et q(t):





4-Les oscillateurs réels ne sont pas idéaux : pertes d'énergie (sous forme de chaleur) respectivement lors des frottements mécaniques, lors du passage du courant dans les conducteurs électriques (effets joule).

Exercice 3: bobine à inductance réglable

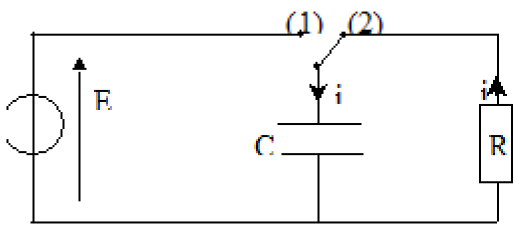
On veut vérifier la valeur de l'inductance indiquée par le curseur du dispositif de réglage d'une bobine à noyau de fer doux. Pour cela on va procéder en deux étapes :

Première étape : on détermine la valeur de la capacité d'un condensateur par l'étude expérimentale de sa décharge à travers un conducteur ohmique.

Seconde étape: on étudie la décharge de ce condensateur à travers la bobine pour en déduire la valeur de son inductance.

I-Détermination de la capacité d'un condensateur :

Le circuit d'étude du condensateur est schématisé ci-dessous :



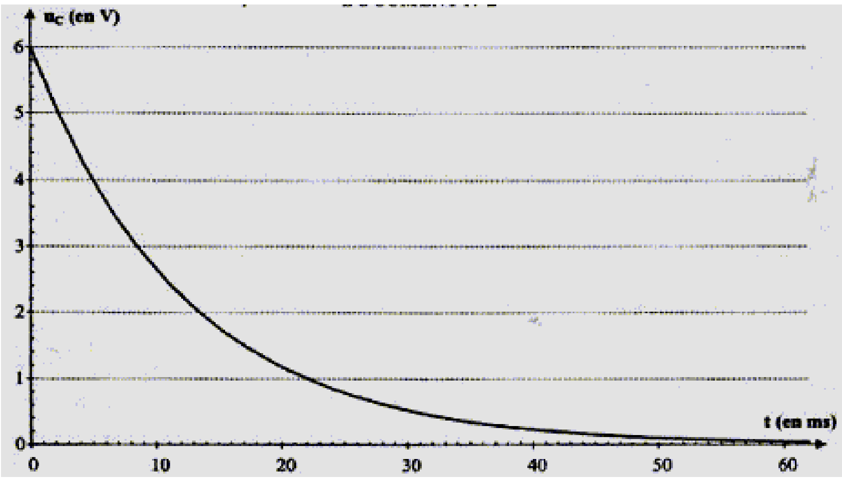
L'interrupteur est en position 1. Le condensateur est chargé sous la tension E. À la date t = 0, on commute l'interrupteur en position 2. Le condensateur se décharge à travers un conducteur ohmique de résistance R = 5,6 kΩ.

En utilisant la convention récepteur, flécher les tensions u_C aux bornes du condensateur et u_R aux bornes du conducteur ohmique. Noter par q et - q les charges des armatures du condensateur.

Montrer que l'équation différentielle du circuit vérifiée par la tension u_C peut s'écrire : u_C + RC du_C/dt= 0. La solution de l'équation est $u_C(t) = E \exp(-t/\tau)$ avec la constante de temps τ = RC.

À t = τ, la tension aux bornes du condensateur est-elle égale à 37 %, 63% ou 93% de sa valeur initiale ? Justifier la réponse.

À l'aide du graphe donné ci-dessous, déterminer la valeur de la constante de temps τ.

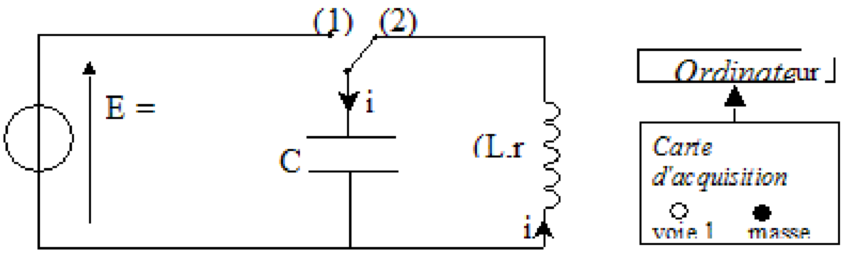


En déduire la valeur de la capacité C du condensateur.

Sur le graphe donné, tracer l'allure de la courbe de décharge u_C = f(t) dans le cas où on utilise un conducteur ohmique de résistance R' plus faible. Justifier.

Mesure de l'inductance de la bobine :

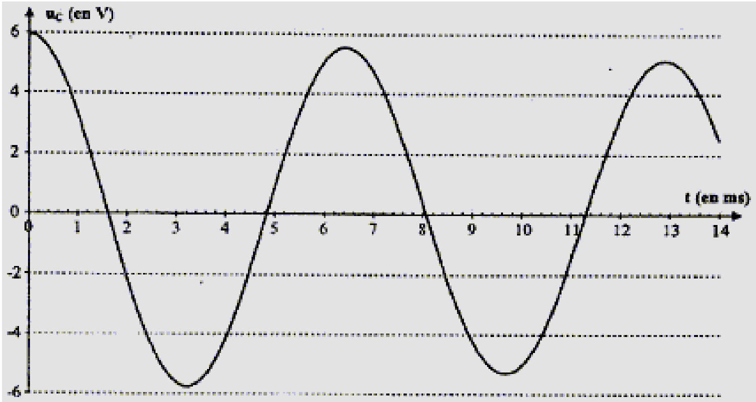
La bobine étudiée a une inductance L que l'on peut régler de 0,1 H à 1,1 H et une résistance r = 12 Ω. On admet que la relation u_L = ri + Ldi/dt où u_L et i sont définis en convention récepteur, reste valable aux bornes de la bobine avec noyau de fer doux. Pour mesurer une valeur L de l'inductance de la bobine, on place l'index de réglage sur 0,5 H. On réalise le circuit suivant :(C = 2,2 µF).



L'interrupteur est en position 1. Le condensateur est chargé sous la tension E. À la date t = 0, on commute l'interrupteur en position 2.

Pour visualiser à l'ordinateur la tension u_C aux bornes du condensateur, représenter sur le schéma du circuit les connexions de la voie I et de la masse de la carte d'acquisition.

Pourquoi qualifie-t-on le régime de la tension u_C de pseudo-périodique ?

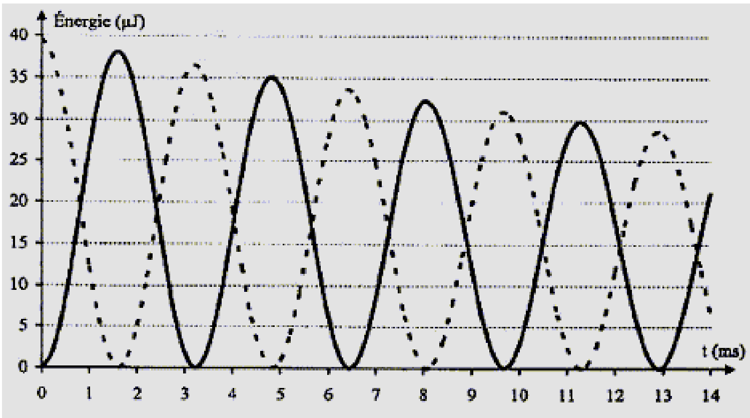


Dans notre expérience, on peut considérer que la pseudo-période T est égale à la période propre donnée par la relation: $T_0 = 2\pi(LC)^{½}$. En vous aidant de la courbe $u_C = f(t)$, déterminer la valeur de l'inductance L du circuit en expliquant votre démarche.

Comparer la valeur de l'inductance obtenue précédemment avec la valeur pointée par l'index de la bobine en calculant l'écart relatif $|L_{exp}-L_{bob}|/ L_{bob}$. L'indication de l'index est-elle correcte ? Justifier la réponse.

Bilan énergétique :

Maintenant on s'intéresse à l'évolution temporelle des énergies emmagasinées par le condensateur et la bobine, W_C et W_L.



Écrire les expressions des énergies W_C et W_L en fonction des données u_C, i intensité du courant dans le circuit, C et L.

En vous aidant des conditions initiales, identifier les courbes W_C et W_L . Justifier votre réponse.

En comparant les évolutions temporelles des énergies W_C et W_L, que se passe-t-il entre le condensateur et la bobine ?

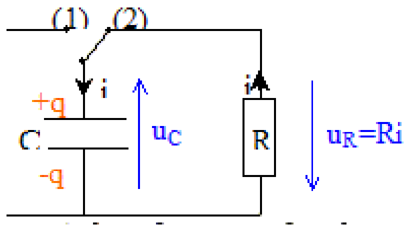
L'énergie totale $W = W_C + W_L$ emmagasinée par le circuit décroît au cours du temps. Quelle est l'origine de cette perte d'énergie ?

On aurait pu faire cette étude en associant en série avec la bobine à inductance réglable et le condensateur, un dipôle qui entretient les oscillations électriques. Quel est le rôle de ce dipôle ?

corrigé

Détermination de la capacité C du condensateur:

1-schéma avec flèches tensions: (nota:avec la convention récepteur, la flèche tension aux bornes d'un dipôle est de sens opposé au sens d'orientation du circuit.



2-équation différentielle:

additivité des tensions : $u_C + u_R = 0$; $u_C + Ri = 0$;

i= dq/dt et d'autre part : $q = Cu_C$ d'où $i = C du_C/dt$

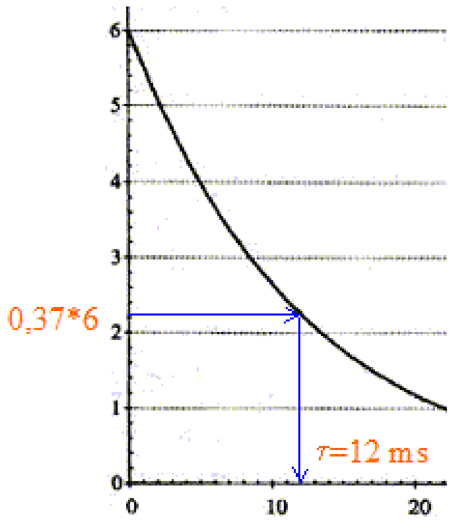
par suite : $u_C + RC\, du_C/dt = 0$.

La solution de l'équation différentielle est $u_C = E \exp(-t/\tau)$.

A t= 0 , la tension aux bornes du condensateur est-elle égale à $u_C(-) = E \exp(0) = E$.

3-À t = τ, la tension aux bornes du condensateur est-elle égale à $u_C(\tau) = E \exp(-\tau/\tau) = E \exp(-1) = 0{,}37$ E soit 37 % de sa valeur initiale.

4-valeur de la constante de temps τ :détermination graphique



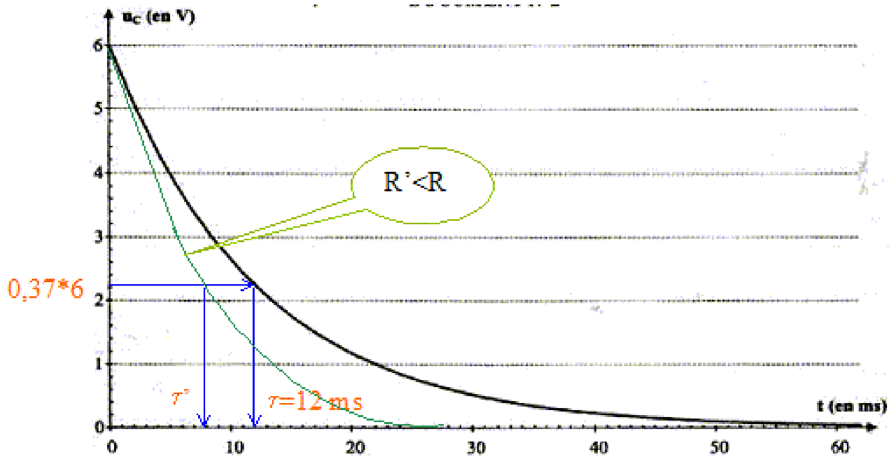
5-valeur de la capacité C du condensateur :

d'une part $\tau = 1{,}2\ 10^{-2}$ s et R = 5,6 kτ = 5,6 10^3 τ et d'autre part τ =RC

soit C= τ /R = 1,2 10^{-2} /5,6 10^3 = 2,1 10^{-}.

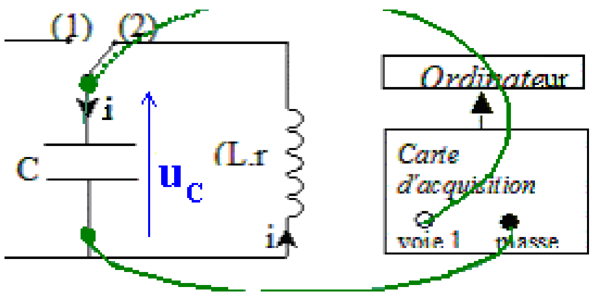
6-Allure de la courbe de décharge u_C = f(t) dans le cas où on utilise un conducteur ohmique de résistance R' plus :

d'une part τ '= R'C et d'autre part R' est inférieure à R ; en conséquence τ '<τ



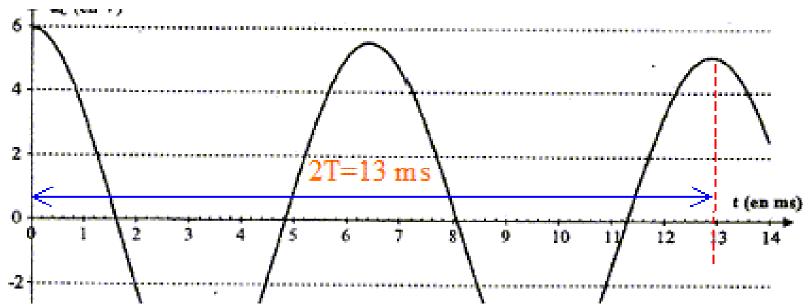
Mesure de l'inductance L de la bobine:

1-branchements pour visualiser à l'ordinateur la tension u_C aux bornes du condensateur :



2-Le régime de la tension u_C est pseudo-périodique car l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps.

3-valeur de l'inductance L du circuit :



D'une part $T=T_0$= 6,5 10^{-3} s et d'autre part $T_0 = 2\pi(LC)^{½}$ soit $T^2_0=4\pi^2$ LC

d'où $L= T^2_0/(4\pi^2$ C) avec C= 2,2 10^- ; L= (6,5 $10^{-3})^2$ / (4*3,14² *2,2 10^{-6}) =0,487 soit

L=0,49H

4-L'écart relatif vaut alors : (0,50-0,487) / 0,50 = 0,026 (2,6 %). L'indication de l'index est satisfaisante à 3% près.

Bilan des énergies:

1-expression des énergies:

L'énergie stockée par le condensateur s'exprime par : $W_C = ½C(u_C)^2$.

L'énergie emmagasinée par la bobine s'exprime par : $W_L = ½Li^2$.

Les conditions initiales sont : condensateur chargé , $u_C = E$; intensité nulle.

2-La courbe correspondant à W_C (courbe tracée en pointillés) présente donc une valeur maximale à l'instant initial, et la courbe correspondant à W_L (courbe en trait plein) passe par zéro à l'instant initial.

3-En comparant les évolutions temporelles des énergies W_C et W_L, on constate que quand W_C décroît alors W_L croît et vis versa : il y a donc un échange permanent d'énergie entre condensateur et bobine.

4- Au cours de cet échange, une partie de l'énergie est perdue, dissipée sous forme d'effet joule dans les parties résistives du circuit. L'énergie totale $W = W_C + W_L$ emmagasinée par le circuit décroît donc au cours du temps.

5-En associant en série avec la bobine à inductance réglable et le condensateur, un dipôle qui entretient les oscillations électriques, on compense à chaque instant l'énergie perdue par effet joule.