Résolution de l'équation du troisième degré (première partie)

Le but de l'activité est d'étudier une méthode de résolution des équations du troisième degré du type $x^3 + px + q = 0$.

Méthode générale

On considère deux nombres u et v vérifiant les relations suivantes :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$$

1. Montrer que $u + v$ est solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$.
2. Montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $X + \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3 \dfrac{1}{X} = -q$.
3. En déduire que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation du deuxième degré $X^2 + qX - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

Mise en oeuvre de la méthode sur un exemple

On considère l'équation $x^3 + 6x - 7 = 0$ et on cherche une solution sous la forme $u + v$ selon la méthode précédente.

1. Déterminer l'équation du deuxième degré vérifiée par u^3 et v^3.
2. En déduire les valeurs de u et v.
3. En déduire une solution de l'équation $x^3 + 6x - 7 = 0$. Existe-t-il une autre solution dans $\mathbb{R}$?

Application

Résoudre les équations du troisième degré suivantes :

$$\begin{aligned} x^3 - 18x - 35 &= 0 \\ x^3 + 6x - 2 &= 0 \\ x^3 + 3x^2 + 9x + 9 &= 0 \quad \text{(utiliser le changement de variable } x = y - 1\text{)} \end{aligned}$$